ÁLGEBRA LINEAL

Bernardo Acevedo.

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales

Febrero 2014

Contenido

Prólogo

El objetivo del presente libro, es el de facilitar al estudiante de las carreras de ingeniería, la asimilación clara de los conceptos matemáticos tratados, pues es el fruto de un cuidadoso análisis de los ejemplos resueltos y de los ejercicios propuestos con sus debidas respuestas, basado en mi experiencia como docente de la Universidad Nacional sede Manizales.

Desde luego que los escritos que se presentan no son originales, ni pretenden serlo, toda vez que es una recopilación organizada y analizada de difernetes textos y de mi experiencia personal.

Este texto constituye un material de consulta obligada de los estudiantes, el cual les genera un diálogo directo con el profesor.

Capítulo 1

MATRICES

1.1 Definición

Se llama matriz de tamaño $m \times n$, a un conjunto de $m \times n$ elementos dispuestos en m filas y n columnas o una matriz es simpemente, un arreglo rectangular ordenado de números.

Notación:

Una matriz se representa simplemente con una letra mayúscula y sus elementos con letras minusculas entre un parentisis, como por ejemplo.

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ y de forma abreviada } A = (a_{ij})$$

Donde a_{11} es el elemento que está en la fila 1 y columna 1, a_{12} es el elemento que está en la fila 1 y columna 2, a_{1n} es el elemento que está en la fila 1 y columna n, a_{21} es el elemento que está en la fila 2 y columna 1, a_{22} es el elemento que está en la fila 2 y columna 2 y en general a_{ij} es el elemento que está en la fila i y columna j de la matriz A. A la matriz $A_{m\times n}$ se interpreta como una matriz que tiene m filas y n columnas.

Ejemplo 1.1

$$\textit{La matriz } A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \textit{ tiene dos filas y tres columnas}$$

$$\text{La matriz } B_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 1 \\ -8 & 5 & 3 & 2 \\ 7 & -3 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \text{ tiene 4 filas y 4 columnas}$$

$$\text{Las matrices } C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{tienen 3 filas y 3 columnas}$$

$$\text{la matriz } \ E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 4 & 9 \end{pmatrix} \text{ tiene 1 fila y 5 columnas}$$

$$\text{la matriz } \ F = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ tiene 4 fila y 1 columnas}$$

Igualdad.

Dos matrices son iguales, si son del mismo tamaño $m \times n$ y sus elementos situados en el mismo lugar son iguales , es decir, $A = B$ sisi $a_{ij} = b_{ij} \ \forall \ i, j$.

Ejemplo 1.2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Ejemplo 1.3 *Hallar a, b, c, d,e y f de tal forma que las matrices*

$$\begin{pmatrix} 2a-2 & 3e+1 & 2 \\ 2b & f & 5 \\ a-2c & a-d & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

En efecto

$2a-2=0$, *entonces* $a=1, 2b=4$, *entonces* $b=2, a-2c=4$ *entonces* $c=\frac{-3}{2}, 3e+1=4$

$$\text{entonces } e=1, \quad f=0, a-d=1 \text{ entonces } d=0$$

1.2 Operaciones entre matrices Suma.

Dadas dos matrices $A \ y \ B$ de tamaño $m \times n$, la matriz suma $A + B$, es otra matriz de tamaño $m \times n$, que se obtiene sumando los elementos de A y B que ocupan la misma posición, es decir, se toma el elemento a_{ij} de A y se suma con el elemento b_{ij} de B, es decir :

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$A_{2\times 3} + B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 & 4+0 & 5+2 \\ 0+3 & 1+1 & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 1 \\ -8 & 5 & 3 & 2 \\ 7 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 8 & -9 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 6+8 & 9-9 & 0+1 \\ 1+1 & 3+0 & 7+2 & 1+1 \\ -8+4 & 5+5 & 3+3 & 2+2 \\ 7+1 & 3+3 & 0+0 & 4+1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 14 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 2 \\ -4 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la suma.

Sea A,B y C matrices de tamaño $m \times n$, entonces

1. Clausurativa $A + B \in M_{m\times n}(R)$
2. Conmutativa $A + B = B + A$
3. Asociativa $A + (B + C) = (A + B) + C$
4. El elemento neutro de una matriz A, es la matriz nula 0 ya que $A + 0 = 0 + A = A$
5. La Inversa aditiva de una matriz A es $-A$, es decir, $A + (-A) = (-A) + A = 0$

Demostración de la segunda propiedad.

Para demostrar la propiedad conmutativa se toma el elemento ij de $A+B$ que es $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$ que es el elemento ij de $B+A$

Ejemplo 1.4

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2 & 4+3 & 5+5 \\ 3+4 & 2+2 & 4+0 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 2+1 & 3+4 & 5+5 \\ 4+3 & 2+2 & 0+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}=B+A.$$

Ejemplo 1.5

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+1 & 3+2 \\ 4+0 & 5+3 \\ 6+2 & 8+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

$$B+A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2 & 2+3 \\ 0+4 & 3+5 \\ 2+6 & 4+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

luego

$$A+B=B+A$$

1.2.1 Multiplicación de una matriz por un escalar.

Dada una matriz $A_{m\times n}$ y un número real α, entonces el producto αA es otra matriz de tamaño $m\times n$ que se obtiene multiplicando cada elemento de A por α es decir, $\alpha A=\alpha\ (a_{ij})=(\alpha a_{ij})$

Ejemplo 1.6

$$Si\ A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces

$$a)\quad 3\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3.1 & 3.4 & 3.5 \\ 3.3 & 3.2 & 3.4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 12 & 15 \\ 9 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$b)\quad -2\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-2).1 & (-2).4 & (-2).5 \\ (-2).3 & (-2).2 & (-2).4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -8 & -10 \\ -6 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la multiplicación de una matriz por un escalar.

Sean α, β números reales cualquiera, entonces

1. $\alpha\,(A+B) = \alpha A + \alpha B.$
2. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
4. $1.A = A$

Demostración primera propiedad.

Para demostrar esta propiedad se toma el elemento ij de $\alpha\,(A+B)$ que es $\alpha\,(a_{ij}+b_{ij}) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}$ que es el elemento ij de αA, más el elemento ij de αB.

Ejemplo 1.7

$$3\,(A+B) = 3\left[\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right] = 3\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 24 & 18 \\ 15 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

$$3A+3B = 3\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 15 \\ 9 & 6 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 12 & 3 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 24 & 18 \\ 15 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

luego

$$3\,(A+B) = 3A+3B$$

Ejemplo 1.8

$$a) \qquad (2+3)\,A = (2+3)\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 25 \\ 15 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$y \quad 2A+3A = 2\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 12 & 15 \\ 9 & 6 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 20 & 25 \\ 15 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

luego

$$(2+3)\,A = 2A+3A$$

1.2.2 Resta

Sean A y B matrices del mismo orden $m \times n$, entonces se define la resta de las dos matrices como :

$$A - B = A + (-1)B$$

Ejemplo 1.9

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

1.2.3 Multiplicación de dos matrices AB

Dadas las matrices A de tamaño $m \times n$ y B de tamaño $n \times p$, la matriz producto AB es la matriz de tamaño $m \times p$, en la que el elemento situado en la fila i y en la columna j de $AB = C$ se obtiene multiplicando la fila i de la matriz A por la columna j de la matriz B de la siguiente manera.

$$c_{ij} = (a_{i1} \ \ a_{i2} ... a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Para multiplicar una matriz A por una matriz B, el número de columnas de la matriz A, debe ser igual a el número de filas de la matriz B, y el resultado es una matriz C con número de filas de A y columnas B, es decir,

$$A_{m\times n} \ B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Ejemplo 1.10

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2\times 4 + 3\times 1 + 1\times 0 & 2\times 2 + 3\times 1 + 1\times 3 \\ 1\times 4 + 0\times 1 + 4\times 0 & 1\times 2 + 0\times 1 + 4\times 3 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Ejemplo 1.11 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 5 + 2\times 7 & 1\times 6 + 2\times 8 \\ 3\times 5 + 4\times 7 & 3\times 6 + 4\times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$

Ejemplo 1.12 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

Ejemplo 1.13 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (11)$

Forma General

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots & a_{1j}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots & a_{2j}\ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3}\ldots & a_{ij}\ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\ldots & a_{mj}\ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\ldots & b_{1j}\ldots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\ldots & b_{2j}\ldots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3}\ldots & b_{ij}\ldots & b_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3}\ldots & b_{nj}\ldots & b_{np} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\ldots & c_{1j}\ldots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\ldots & c_{2j}\ldots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3}\ldots & c_{ij}\ldots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3}\ldots & c_{nj}\ldots & c_{np} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kj} & \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kp} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kj} & \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kp} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k2} & \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} & \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kp} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k2} & \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kj} & \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kp} \end{bmatrix} \textit{donde}$$

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + ... + a_{1n}b_{n1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1}$$
$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + ... + a_{1n}b_{n2} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2}$$
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Ejemplo 1.14

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 22 & 23 & 31 & 36 \\ 5 & 8 & 7 & 9 & 10 \\ 31 & 18 & 21 & 35 & 44 \end{bmatrix}$$

donde

$$c_{11} = 2*4+3*3+4*1+5*0 = 21$$
$$c_{12} = 2*3+3*1+4*2+5*1 = 22$$
$$c_{13} = 2*5+3*0+4*2+5*1 = 23$$
$$c_{14} = 2*6+3*2+4*2+5*1 = 31$$
$$c_{15} = 2*7+3*3+4*2+5*1 = 36$$

Se hace lo mismo con la segunda y tercera fila.

1.3 Algunas Propiedades.

Sean A,B $\in M_{m\times n}(R)$ donde $M_{m\times n}(R)$ es cualquier matriz con $m \times n$ elementos reales; α y β escalares entonces.

1. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
3. $1.A = A$
4. $A(BC) = (AB)C$ desde que se puedan multiplicar.
5. $AI = IA = A$ donde I es la matriz idéntica.
6. $A(B + C) = AB + AC$
7. $A0 = 0A = 0$

Demostración sexta propiedad.

Para demostrar esta propiedad se toma el elemento ij de $A(B+C)$ que es

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}$$

que es el elemento ij de AB mas el elemento ij de AC luego

$$A(B+C) = AB + AC$$

Ejemplo 1.15 *Dadas las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{Hallar } A \pm B, A \times B, B \times A$$

En efecto

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 & 1-1 \\ 3-1 & 0-2 & 0-1 \\ 5-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 13 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 4 & 8 \\ 26 & 6 & 11 \\ 32 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

$$(A-B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 1 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \times B)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 9 & 21 \\ 30 & 12 & 24 \\ 72 & 25 & 59 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.16 *Si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ verifique que}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.17 *Una fabrica produce dos modelos de lavadoras: A y B, en cada uno de los tamaños grande, pequeño y mediana. Produce diariamente 400 grandes , 200 pequeñas y 50 medianas del tipo A, 300 grandes, 100 pequeñas y 30 medianas del tipo B, la del tamaño grande gasta 30 horas de taller y 3 horas de administracion, la del tamaño pequeño gasta 20 horas de taller y 2 horas de administracion,la del tamaño mediano gasta 15 horas de taller y 1 hora de administracion, represente la informacion en matrices. En efecto:*

Matriz de produccion

modelos	grande	pequeño	mediano
A	400	200	50
B	300	100	30

Matriz de coste en horas

	taller	administracion
grandes	30	3
pequeño	20	2
mediano	15	1

Matriz que expresa las hora de taller y de administracion para dada uno de los modelos

$$\begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 30 & 3 \\ 20 & 2 \\ 15 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16\,750 & 1650 \\ 11\,450 & 1130 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.18 *Una empresa de muebles fabrica tres modelos de estanteria: A,B,C en cada uno de los tamaños grande y pequeño. produce diariamente 2000 estanterias grandes y 4000 pequeñas del tipo A, 5000 grandes y 3000 pequeñas del tipo B, 4000 grandes y 6000 pequeña del tipo C. Cada estanteria grande lleva 20 tornillos y 6 soportes y cada estanteria pequeña lleva 12 tornillos y 4 soportes, en cualquiera de los tres modelos, represente esta informacion en matrices.*

En efecto:

$$\begin{pmatrix} \text{grandes} & \text{pequeñas} & \text{modelos} \\ 2000 & 4000 & A \\ 5000 & 3000 & B \\ 4000 & 6000 & C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{tornillos} & \text{soportes} & \text{tipo} \\ 20 & 6 & \text{grande} \\ 12 & 4 & \text{pequeña} \end{pmatrix}$$

la siguiente matriz expresa el numero de tornillos y soportes para cada modelo de estanteria

$$\begin{pmatrix} 2000 & 4000 \\ 5000 & 3000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 88\,000 & 28\,000 \\ 136\,000 & 42\,000 \\ 152\,000 & 48\,000 \end{pmatrix}$$

1.4 Algunos tipos de matrices.

1.4.1 Matriz Cuadrada de tamaño n.

Una matriz A se dice cuadrada de tamaño n , si el número de filas es igual al número de columnas , es decir si $m = n$. La diagonal de una matriz cuadrada son los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33,}...a_{nn}$ de A y la traza de A se define como la suma de los elementos de la diagonal, es decir, traza de $A = a_{11} + a_{22} + a_{33+}... + a_{nn}$

$$\text{Se define : } \quad A^0 = I, A^{n+1} = A^n A, A^n A^m = A^{n+m}$$

.

Ejemplo 1.19 *Las matirces* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ *son matrices cuadradas, la traza de* $A = 2+1+0 = 3$, *la traza de* $B = 4+1+2+1 = 8$, *la traza de* $C = 3+6 = 9$

Matriz no Cuadrada

Es una matriz que no cumplen con la condición anterior.

Ejemplo 1.20 *Las matirces* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$ *son matrices no cuadradas, pues el orden de la matriz* A *es de* 3×2, (*tres filas,dos columnas*), *el de* B *es* 3×4 *y el de* C *es de* 1×2

1.4.2 Matriz Idéntica.

Es una matriz cuadrada,se nota por I y es la matriz que tiene unos en la diagonal y cero fuera, es decir, A se dice que es la matriz idéntica sisi

$$a_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{array} \right\}$$

Ejemplo 1.21

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Uno en la diagonal y cero fuera de ella.

Ejemplo 1.22 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. *Uno en la diagonal y cero fuera de ella.*

1.4.3 Matriz diagonal.

Es una matriz cuadrada, en la que todos los elementos que no están en la diagonal son cero , es decir, A es una matriz diagonal sisi $a_{ij} = 0 \;\; \forall \;\; i \neq j$

Ejemplo 1.23

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son matrices diagonales, la matriz idéntica es diagonal, pero no toda matriz diagonal es idéntica.

1.4.4 Matriz escalar.

Es una matriz diagonal, en la que todos los elementos que están en la diagonal coinciden y fuera de la diagonal son cero, es decir, A es una matriz escalar sisi

$$a_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} k \text{ en } i = j \\ 0 \text{ en } i \neq j \end{array} \right\}$$

Ejemplo 1.24

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La forma general de la matriz escalar de 3×3 *es*

$$E = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

1.4.5 Matriz invertible o matriz no singular.

Dada una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$, se dice que A es invertible, si existe una matriz B, de tamaño $n \times n$, tal que $AB = BA = I$ y en tal caso la inversa de A es B y se nota por $A^{-1} = B$.

Ejemplo 1.25 *La matriz inversa de* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ *es* $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ *ya que*

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} \\ \frac{-3}{4} + \frac{3}{4} & \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\,A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{4} & \frac{3}{4} + \frac{-3}{4} \\ \frac{1}{4} + \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.26 *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *entonces* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *verifique que* $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Ejemplo 1.27 *Si*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

solucionar la ecuacion

$$AX = B$$

En efecto como la matriz A tiene inversa, ya que su determinante es 1 que es diferente de cero entonces

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \text{ entonces } IX = A^{-1}B \text{ y asi } X = A^{-1}B$$

por lo tanto

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.28 *Solucionar el sistema*

$$\begin{matrix} x + y = A \\ x - y = B \end{matrix} \quad si \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

En efecto, si sumamos las dos ecuaciones obtenemos

$$2x = A + B \text{ por tanto } x = \frac{A+B}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

y si restamos obtenemos

$$2y = A - B \text{ por tanto } y = \frac{A-B}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Propiedades de la matriz invertible.

Si A y B son matrices invertibles, entonces

1. AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. En efecto $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (ABB^{-1}A^{-1}) = AIA^{-1} = I$
   y $(B^{-1}A^{-1})(AB) = (B^{-1}A^{-1}AB) = B^{-1}IB = I$ luego si
   $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$, entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$
4. A^n es invertible y $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ para $n = 0, 1, 2...$
5. Para cualquier escalar $k \neq 0$, la matriz kA es invertible y $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

1.4.6 Matriz transpuesta.

La transpuesta de una matriz A de tamaño $m \times n$ notada por A^T, es la matriz de tamaño $n \times m$, que se obtiene intercambiando las filas por las columnas de A o viceversa.

Ejemplo 1.29

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left(A^T\right)^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A$$

Ejemplo 1.30

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ entonces } A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(A^T\right)^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

Propiedades de la matriz transpuesta.

1. $\left(A^T\right)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(AB)^T = B^T A^T$
4. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
5. $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

1.4.7 Matriz simétrica.

Sea $A_{n\times n}$, A es simétrica sisi $A = A^T$ *sisi* $a_{ij} = a_{ji}$, luego

Si A una matriz cualquiera de tamaño 3×3, para que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

sea simétrica debe cumplirse que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = A^T$$

sisi $a_{11} = a_{11}$, $a_{22} = a_{22}$, $a_{33} = a_{33}$, $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$ luego la forma general de una matriz simétrica de tamaño 3×3 es

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.31

La matrices

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix};\quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 4 & 26 & 7 \\ 4 & 6 & 8 & 9 \\ 26 & 8 & 0 & 3 \\ 7 & 9 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

son matrices simétricas

Si se tiene una matriz cuadrada y le sumo su transpuesta, se obtiene una matrtiz simétrica, es decir,.

$A + A^T$ es una matriz Simétrica; en efecto $\left(A + A^T\right)^T = A^T + A = A + A^T$.

Ejemplo 1.32

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 7 \\ 10 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 14 \end{pmatrix}$$

1.4.8 Matriz antisimétrica.

$A_{n\times n}$ es antsimétrica sisi $A = -A^T$ *sisi* $a_{ij} = -a_{ji}$, por tanto

Sea A una matriz cualquiera de tamaño 3×3, para que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

sea antisimétrica debe cumplirse que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix} = -A^T$$

sisi $a_{11} = -a_{11}$
entonces $a_{11} + a_{11} = 0 \Leftrightarrow 2a_{11} = 0 \Leftrightarrow a_{11} = 0$, $a_{22} = -a_{22}$
entonces $a_{22} + a_{22} = 0 \Leftrightarrow 2a_{22} = 0 \Leftrightarrow a_{22} = 0$, $a_{33} = -a_{33}$
entonces $a_{33} + a_{33} = 0 \Leftrightarrow 2a_{33} = 0 \Leftrightarrow a_{33} = 0, a_{12} = -a_{21},\ \ a_{13} = -a_{31}$, $a_{23} = -a_{32}$
luego si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

la forma general de una matriz Antisimétrica de orden 3×3 es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & -a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.33 *La matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz antisimétrica.

Si se tiene una matriz cuadrada y se le resta su matriz transpuesta, se obtiene una matriz antisimétrica,es decir,
$A - A^T$ es una matriz Antisimétrica; en efecto $\left(A - A^T\right)^T = A^T - A = -\left(A - A^T\right)$.

Ejemplo 1.34

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1.4.9 Matriz conjugada.

Matriz conjugada $A_{m \times n}$.La conjugada de A, notada por $\bar{A}$, es la que se obtiene de A al conjugar cada uno de sus elementos.

Ejemplo 1.35 *Recordemos que*

$$z = x + iy \quad \overline{z} = x - iy$$

$$A = \begin{pmatrix} i & 2-i & 3 \\ 4 & 5 & -i \end{pmatrix}; \bar{A} = \begin{pmatrix} -i & 2+i & 3 \\ 4 & 5 & i \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.36

$$B = \begin{pmatrix} i & 2i \\ 3 & 4-i \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} -i & -2i \\ 3 & 4+i \end{pmatrix}$$

1.4.10 Matriz Real.

Una Matriz $A_{m \times n}$ es real sisi $A = \bar{A}$. Una matriz es real, cuando sus elementos son números reales.

Ejemplo 1.37

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

son matrices reales

Propiedades de la conjugada.

1. $\overline{(\bar{A})} = A$
2. $\overline{(A + B)} = \bar{A} + \bar{B}$
3. $\overline{(AB)} = \bar{A}\bar{B}$

1.4.11 Matriz Hermítica.

A es hermítica sisi $A = \left(\bar{A}\right)^T$

Se hallará la forma general de una matriz hermítica asi : Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} + ib_{11} & a_{12} + ib_{12} & a_{13} + ib_{13} \\ a_{21} + ib_{21} & a_{22} + ib_{22} & a_{23} + ib_{23} \\ a_{31} + ib_{31} & a_{32} + ib_{32} & a_{33} + ib_{33} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} - ib_{11} & a_{12} - ib_{12} & a_{13} - ib_{13} \\ a_{21} - ib_{21} & a_{22} - ib_{22} & a_{23} - ib_{23} \\ a_{31} - ib_{31} & a_{32} - ib_{32} & a_{33} - ib_{33} \end{pmatrix}$$

$$\left(\bar{A}\right)^T = \begin{pmatrix} a_{11} - ib_{11} & a_{21} - ib_{21} & a_{31} - ib_{31} \\ a_{12} - ib_{12} & a_{22} - ib_{22} & a_{32} - ib_{32} \\ a_{13} - ib_{13} & a_{23} - ib_{23} & a_{33} - ib_{33} \end{pmatrix}$$

Para que la matriz sea hermítica se hace $A = \left(\bar{A}\right)^T$ luego

$$a_{11} + ib_{11} = a_{11} - ib_{11} \Rightarrow ib_{11} = -ib_{11} \Rightarrow 2ib_{11} = 0 \Rightarrow b_{11} = 0$$

$a_{12} + ib_{12} = a_{21} - ib_{21} \Rightarrow a_{12} = a_{21} \; y \; b_{12} = -b_{21}$ y asi sucesivamente luego la forma general de la matriz hermítica es :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + ib_{12} & a_{13} + ib_{13} \\ a_{12} - ib_{12} & a_{22} & a_{23} + ib_{23} \\ a_{13} - ib_{13} & a_{23} - ib_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.38

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3-2i & i \\ 3+2i & 5 & 2+4i \\ -i & 2-4i & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4+5i & 3-2i \\ 4-5i & 0 & -6+5i \\ 3+2i & -6-5i & 0 \end{pmatrix}$$ *son matrices hermiticas*

Ejemplo 1.39 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Demostrar que A, $\overline{A}$, iB son hermiticas

1.4.12 Matriz Antihermítica.

$$A \text{ es antihermítica sisi } A = -\left(\bar{A}\right)^T$$

Se hallara la forma general de una matriz antihermítica asi : Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} + ib_{11} & a_{12} + ib_{12} & a_{13} + ib_{13} \\ a_{21} + ib_{21} & a_{22} + ib_{22} & a_{23} + ib_{23} \\ a_{31} + ib_{31} & a_{32} + ib_{32} & a_{33} + ib_{33} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} - ib_{11} & a_{12} - ib_{12} & a_{13} - ib_{13} \\ a_{21} - ib_{21} & a_{22} - ib_{22} & a_{23} - ib_{23} \\ a_{31} - ib_{31} & a_{32} - ib_{32} & a_{33} - ib_{33} \end{pmatrix}$$

$$\left(\bar{A}\right)^T = \begin{pmatrix} a_{11} - ib_{11} & a_{21} - ib_{21} & a_{31} - ib_{31} \\ a_{12} - ib_{12} & a_{22} - ib_{22} & a_{32} - ib_{32} \\ a_{13} - ib_{13} & a_{23} - ib_{23} & a_{33} - ib_{33} \end{pmatrix}$$

y

$$-\left(\bar{A}\right)^T = \begin{pmatrix} -a_{11} + ib_{11} & -a_{21} + ib_{21} & -a_{31} + ib_{31} \\ -a_{12} + ib_{12} & -a_{22} + ib_{22} & -a_{32} + ib_{32} \\ -a_{13} + ib_{13} & -a_{23} + ib_{23} & -a_{33} + ib_{33} \end{pmatrix}$$

por tanto

$$\begin{pmatrix} a_{11} + ib_{11} & a_{12} + ib_{12} & a_{13} + ib_{13} \\ a_{21} + ib_{21} & a_{22} + ib_{22} & a_{23} + ib_{23} \\ a_{31} + ib_{31} & a_{32} + ib_{32} & a_{33} + ib_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} + ib_{11} & -a_{21} + ib_{21} & -a_{31} + ib_{31} \\ -a_{12} + ib_{12} & -a_{22} + ib_{22} & -a_{32} + ib_{32} \\ -a_{13} + ib_{13} & -a_{23} + ib_{23} & -a_{33} + ib_{33} \end{pmatrix} sisi$$

$$a_{11} + ib_{11} = -a_{11} + ib_{11} \Rightarrow a_{11} = -a_{11} \Rightarrow 2a_{11} = 0 \Rightarrow a_{11} = 0$$

$a_{12} + ib_{12} = -a_{21} + ib_{21} \Rightarrow a_{12} = -a_{21}\ y\ b_{12} = b_{21}$ y asi sucesivamente luego la forma general de La matriz antihermítica es :

$$A = \begin{pmatrix} ib_{11} & a_{12} + ib_{12} & a_{13} + ib_{13} \\ -a_{12} + ib_{12} & ib_{22} & a_{23} + ib_{23} \\ -a_{13} + ib_{13} & -a_{23} + ib_{23} & ib_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.40 $A = \begin{pmatrix} 2i & 3+2i & 5+3i \\ -3+2i & 6i & 7+9i \\ -5+3i & -7+9i & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -3-2i & 6-8i \\ 3-2i & 6i & -8+9i \\ -6-8i & 8+9i & 0 \end{pmatrix}$
son matrices antihermíticas

Ejemplo 1.41 *Verificar que* $B = \begin{pmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $\overline{B}$ *son antihermiticas*

1.4.13 Matriz involutiva.

A es involutiva sisi $A^2 = I$

Ejemplo 1.42 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ *es involutiva, ya que*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Ejemplo 1.43 $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ *es involutiva ya que*

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

1.4.14 Matriz Idempotente.

A es idempotente sisi $A^2 = A$ y si A es idempotente entonces A^T es idempotente

Ejemplo 1.44 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ *es idempotente ya que*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A$$

Ejemplo 1.45 $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ *es idempotente ya que*

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = B$$

1.4.15 Matriz ortogonal.

A es ortogonal sisi $AA^T = A^T A = I$

Ejemplo 1.46 *Las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

son ortogonales, pues

$$AA^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$BB^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4.16 Matriz triangular superior.

$A_{n\times n}$ es triangular superior sisi $a_{ij} = 0 \;\; si \;\; i > j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \text{ es una matriz triangular superior}$$

y es triangular inferior sisi $a_{ij} = 0 \;\; si \;\; i < j$ como por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1.4.17 Matriz triangular.

$A_{n\times n}$, es triangular sisi A es triangular superior o triangular inferior.

Ejemplo 1.47 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ *son matrices triangulares*

Ejemplo 1.48 $F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *son matrices triangulares*

Operaciones elementales en filas o columnas.

Las operaciones elementales en filas son :

1. Multiplicar una fila o columna por un número diferente de cero.
2. Intercambiar 2 filas o columnas cualquiera.
3. Multiplicar una fila o columna por un número diferente de cero y sumársela a otra.

1.4.18 Matriz elemental.

Es la matriz que proviene de la idéntica, por una sola operación elemental.Las siguientes matrices son elementales

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$ A la idéntica en la segunda fila se multiplicó por 4.

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ Intercambió la primera fila por la segunda en la idéntica

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{3f_1+f_2}$$ La primera fila de la matriz identica se multiplicó por 3 y se le sumo a la segunda fila.

1.4.19 Matriz semejante.

$A \sim B$ sisi B se obtiene de A por un número finito de operaciones elementales; es decir, $A \sim B$ sisi $B = PAI$ con P producto de matrices elementales.

Ejemplo 1.49

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{-2f_1+f_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

A es semejante a B, pues B se obtuvo de A por una operacion elemental

Ejemplo 1.50

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{-2f_1+f_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{-3f_1+f_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix}_{-f_2} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix}_{8f_2+f_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}_{\frac{f_3}{-6}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{-3f_2+f_1} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{-2f_3+f_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{f_2 \leftrightarrow f_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

A es semejante a la I, pues la I se obtuvo de A por un numero finito de operaciones elementales

Las matrices elementales de estas operaciones son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{-2f_1+f_2} \rightarrow E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{matrix} E_2 \\ -3f_1+f_3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} E_3 \\ -f_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\frac{E_4}{8f_2+f_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}; \ \frac{E_5}{\frac{f_3}{-6}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}; \ \begin{matrix} E_6 \\ -3f_2+f_1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\underset{-2f_3+f_1}{E_7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \underset{f_2 \leftrightarrow f_3}{E_8} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$I = E_8E_7...E_1AI$ *donde* $E_8E_7...E_1 = P \Rightarrow P$ *es la inversa de* A.

Ejemplo 1.51

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}_{\frac{f_2}{4}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{-2f_2+f_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe que $A \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y que* $B \sim I$, *en otras palabras,*

$$\begin{matrix} A & \underset{E_1}{\sim} & B & \underset{E_2}{\sim} & I \end{matrix} \qquad A \sim B \ \ sisi \ B = E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

y como $B \sim I$ entonces $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{E_2} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}_{E_1} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}_A$

observe que $A \sim I$ pues $I = E_2B = E_2E_1A$ y en general si $A \sim I$ *entonces*

$$I = E_kE_{k-1}...E_2E_1A$$

1.4.20 Matriz de Probabilidad.

Una matriz se dice que es de probabilidad si la suma de los elementos de las filas y de las columnas es igual a 1. Las probabilidades solo estan entre 0 y 1. No se pueden colocar números negativos.

Ejemplo 1.52 *Las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$$

son de probabilidad

1.4.21 Matriz escalonada y escalonada reducida.

Sea $A_{m\times n}$ tal que:

1. El primer elemento no nulo en la fila no nula es 1.
2. Si una fila es nula, ésta debe estar en la parte inferior de la matriz.
3. Sean $i, i+1$ dos filas consecutivas, entonces el primer elemento diferente de cero en la fila $i+1$ debe estar a la derecha del primer elemento diferente de cero en la fila i.(forma analoga para $i, i+2$)
4. Cada columna de A que tiene el primer elemento diferente de cero de alguna fila, debe tener ceros en las demás posiciones.

Si una matriz cumple las 3 primeras condiciones, se dice que es una matriz escalonada y si la matriz cumple con las 4 condiciones, es una matriz escalonada reducida.

Ejemplo 1.53

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

No es escalonada porque el primer elemento de la fila 1 no es 1.

Ejemplo 1.54

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

No es escalonada porque el primer elemento diferente de cero de la fila 2 no está a la derecha del primer elemento de la fila 1.

Ejemplo 1.55 *La matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

es escalonada y escalonada reducida. El primer elemento diferente de cero de la fila número uno es 1. La segunda y tercer columna la hacen escalonada reducida porque los unos tienen solo ceros por debajo y por encima.

Ejemplo 1.56 *La matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

es escalonada y escalonada reducida

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es escalonada y escalonada reducida.}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ es escalonada y escalonada reducida.}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ es escalonada y escalonada reducida.}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ es escalonada y escalonada reducida.}$$

1.4.22 Algunos métodos para hallar la inversa

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Para hallar la inversa se escribe la matriz ampliada $(A \; : I)$ y mediante operaciones elementales en fila se transforma la matriz A en la idéntica y a su derecha queda su inversa, es decir,

$$(A \; : I) \sim\sim\sim\sim \left(I \; : A^{-1}\right)$$

como se observa con el siguiente ejemplo

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right)_{f_1+f_2} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{array} \right)_{\frac{f_2}{7}} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array} \right)_{-2f_2+f_1} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array} \right)$$

$$\textit{luego} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\text{observe que} \quad AA^{-1} = A^{-1}A = I = A^{-1}A$$

ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.57 *Si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \textit{ su inversa es } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En efecto

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{-f_1+f_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{f_2+f_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{-f_3+f_2}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{f_2+f_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{-f_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

por tanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Otra forma de hallar su inversa es por la definición de matriz inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ por tanto } \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a+5c & -b+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego solucionamos el sistema

$$a + 2c = 1, \quad -a + 5c = 0$$

$$b + 2d = 0, \quad -b + 5d = 1$$

se tiene que

$$a = \frac{5}{7}, b = -\frac{2}{7}, c = \frac{1}{7}, d = \frac{1}{7}$$

y asi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

1.5 EJERCICIOS PROPUESTOS CAPITULO 1

1. Ilustrar cada una de las propiedades de las matrices estudiadas con un ejemplo.
2. Dar un ejemplo de cada uno de los tipos de matrices vistas.
3. Bajo que circunstancia se da la igualdad (resp $AB = BA$)
   $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
   $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
   $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$
   $(AB)^2 = A^2B^2$
4. Escribir cualquier matriz A como la suma de una matriz simétrica y una anti-simétrica.Indicación observe que
   $$\left(A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}\right)$$
5. Demostrar que si $AB = A$ y $BA = B$ entonces A y B son matrices Idempotentes
6. Sea
   $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ con $a \geq 0$. Para que valor de a se cumplirá que A es idempotente
   ($ninguno$)
7. Demostrar que si una matriz A tiene dos de las siguientes tres propiedades.
   (a) Simétrica
   (b) Ortogonal
   (c) Involutiva

   Posee la tercera
8. Si A y B son matrices conmutativas demostrar que A^T, B^T conmutan.
9. Si A y B son matrices Invertibles y conmutan, demostrar que A^{-1}, B^{-1} conmutan.

10. Hallar una matriz $A_{3\times 3}$ tal que $a_{ij} = i + j$. Res $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

11. Demostrar que si una matriz A satisface la ecuación $A^2 - 3A + I = 0$ entonces $A^{-1} = 3I - A$.

12. Sean A y B matrices tales que $AB = 0$.

    Demostrar que si A es invertible entonces $B = 0$.

13. Hallar a, b, c, tal que la matriz

    a) $A = \begin{pmatrix} 2 & a - 2b + 2c & 2a + b + c \\ 3 & 5 & a + c \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ sea simétrica Resp $(a, b, c) = (11, -9, -13)$

    b) $B = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ 5 & -6 & 2 \\ b & 2 & 7 \end{pmatrix}$ sea simétrica. Resp $(a, b) = (5, 3)$

14. Demostrar que:

    $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$, $Tr(AB) = Tr(BA)$, $Tr(cA) = cTr(A)$, $Tr(A^T) = Tr(A)$, $Tr(A^TA) \geq 0$

15. Cuales de los enunciados siguientes es verdadero.

    (a) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ Resp V
    (b) $(ABC)^T = C^TB^TA^T$ Resp V
    (c) AA^T es una matriz simétrica Resp V
    (d) Si A y B son matrices simétricas entonces $(AB)^T = BA$ Resp V
    (e) Si A y B son matrices simétricas entonces $(A + B)$ es simétrica Resp V
    (f) $A + A^T$ es una matriz simétrica Resp V
    (g) $A - A^T$ es una matriz antisimétrica Resp V
    (h) La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es involutiva para b número real cualquiera Resp V
    (i) La matriz $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal Resp V

(j) Si $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ entonces $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$ Resp V

(k) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ entonces $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ Resp V

(l) Si A y B son matrices invertibles entonces $A+B$ es una matriz invertible Resp F

(m) Si A y B son matrices ortogonales entonces AB es una matriz ortogonal Resp V

(n) Si A^{-1} existe, y $AB = AC$ entonces $B = C$.

(o) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, Explicar 2 métodos diferentes como hallar A^{-1} y cual es la inversa. Resp $\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{16}{15} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{15} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

16. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$,

    Calcular: $B + C$, AB, BA, AC, CA, $A(3B - 2C)$

17. Dadas dos matrices M y N, probar que $M + N$ y MN están definidas, sisi, M y N son cuadradas del mismo orden.

18. Demostrar que si M conmuta con A y N conmuta con A, entonces MN+NM conmuta con A.

19. Hallar los valores de k, tal que A sea un cero de P(x) si:

    (a) $A = \begin{pmatrix} i & k \\ k & i \end{pmatrix}$, $P(x) = x^2 - 2ix - 2k$ Resp $k = 1$

    (b) $A = \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P(x) = -x^3 + 2kx^2 - x$ Resp $k = 0, 1, -1$

20. Sabiendo que A y B son conmutables y que además:

    (a) A es idempotente y B es involutiva, pruebe que $(A + B)^3 + (A - B)^3 = 8A$

(b) A es involutiva y B es idempotente, pruebe que $(A+B)^3-(A-B)^3=8B$

21. Hallar los valores de k, tal que:

(a) $A=\begin{pmatrix} k & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & k+4 & 0\end{pmatrix}$ es idempotente. Resp $k=1$

(b) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & k+2\\ k & k & k\\ k+2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ es involutiva.Resp $k=-1$

22. Descomponga $\begin{pmatrix} -i & i & -i\\ 1 & -1 & 1\\ i & -i & i\end{pmatrix}$ como la suma de una matriz hermítica y una antihermítica.$\left(A=\frac{A+\bar{A}^T}{2}+\frac{A-\bar{A}^T}{2}\right)$

23. Para cuáles valores reales de a,b,c y d.

(a) $A=\begin{pmatrix} ai & 3+ai & a-4i\\ b-i & bi & -a+bi\\ c+di & a+bi & di\end{pmatrix}$ es antihermítica? Resp $a=-1, c=1, b=-3, d=-4$

(b) $A=\begin{pmatrix} 3+ai & a+bi & 3c+di\\ 4i & c-di & b+ci\\ -3 & -4+i & di\end{pmatrix}$ es hermítica? Resp $a=0, c=-1, b=-4, d=0$

(c) $A=\begin{pmatrix} ai & -3+bi & a+1\\ b-3i & ci & (b+1)i\\ -1 & -4 & di\end{pmatrix}$ es antisimétrica? Resp $a=0, c=0, b=3, d=0$

24. Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ verificar que $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y que $A^n=\begin{pmatrix} 1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

25. Sea $A=\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$ verificar que

(a) $A^2=\begin{pmatrix} \cos 2x & -\sin 2x\\ \sin 2x & \cos 2x\end{pmatrix}$

(b) $A^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$

26. Sea $A = \begin{pmatrix} p & 0 \\ i & p \end{pmatrix}$ donde p es un escalar e i es la unidad imaginaria,

    Verificar que $A^2 = 2pA - p^2 I$, obtenga $A^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ np^{n-1}i & p^n \end{pmatrix}$ y calcule A^{1234}.

27. Si $A^T B^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $|B| = 2$, hallar $|A|$. resp 1

28. Si $B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, obtenga $|A|$ Resp $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{9}{4} \\ -\frac{13}{2} & \frac{17}{4} \end{pmatrix}$, $|A| = \frac{1}{4}$

29. Demostrar que si A y B son matrices cuadradas simétricas conmutativas de un mismo orden, entonces la matriz: $C = ABAB...AB$ es simétrica.

30. Demostrar que una matriz escalar E de orden n, conmuta con cualquier matriz A de orden n.

31. Demostrar que el producto de dos matrices simétricas es una matriz simétrica, sii las matrices dadas son conmutativas.

32. Demostrar que el producto de dos matrices antisimétricas es una matriz simétrica si y sólo si, las matrices dadas son conmutativas.

33. Comprobar que, si P es una matriz idempotente, entonces $Q = 2P - I$, es una matriz involutiva y, recíprocamente, si Q es una matriz involutiva, entonces $P = \frac{1}{2}(Q + I)$ es una matriz idempotente.

34. Demostrar que:

    (a) El producto de dos matrices ortogonales, es una matriz ortogonal.

    (b) El producto de dos matrices unitarias, es una matriz unitaria. ($A(\overline{A})^T = (\overline{A})^T A = I$) la matriz $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1+2i & -4-2i \\ 2-4i & -2-i \end{pmatrix}$ es unitaria

35. Demostrar que sí:

    $AB = A$ y $BA = B$, entonces las matrices A y B son idempotentes.

36. Demuestre que A y B conmutan, sí y solo sí $A-kI$ y $B-kI$, conmutan para cierto escalar k.

37. Si A conmuta con B, demuestre que la transpuesta de A conmuta con la transpuesta de B.

38. Dadas las matrices $n \times n$ simétricas A y B, demuestre que:

    (a) La matriz $A+B$ es simétrica.

    (b) La matriz AB puede ser no simétrica.

39. Sí A y B son antisimétricas, pruebe que $A+B$ es antisimétrica.

40. Ilustrar con ejemplos que:

    (a) $\left(\overline{A+B}\right)^T = \left(\overline{A}\right)^T + \left(\overline{B}\right)^T$

    (b) $\left(\overline{AB}\right)^T = \left(\overline{B}\right)^T \left(\overline{A}\right)^T$

    (c) $\left(k\overline{A}\right)^T = \left(\overline{k}\right) \left(\overline{A}\right)^T$

41. Sí A es una matriz involutiva, demostrar que: $\frac{1}{2}(I+A)$ y $\frac{1}{2}(I-A)$ son matrices idempotentes y que $\frac{1}{2}(I+A).\frac{1}{2}(I-A)$ es la matriz cero.

42. Si A y B son matrices cuadradas y A es no singular, verifique que: $(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$.

43. Demostrar que si A y B son matrices inversibles y A conmuta con B, entonces, la inversa de A conmuta con la inversa de B.

44. Sea $A^k = 0$.

    Demostrar que: $(I-A)^{-1} = I \ + A + A^2 + ... + A^{K-1}$

45. Demostrar que toda matriz de segundo orden: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, satisface la ecuación:

    $X^2 - (a+d)X + (ad-bc)I = 0$

46. Sean A y B matrices no singulares de un mismo orden. Comprobar que las cuatro igualdades:

(a) $AB = BA$

(b) $AB^{-1} = B^{-1}A$

(c) $A^{-1}B = BA^{-1}$

(d) $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ Son equivalentes entre sí.

47. Mostrar que la solucion de la ecuacion

$$XA + B = C$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

48. Hallar todas las matrices que conmuten con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Resp} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Capítulo 2

DETERMINANTES.

A cualquier matriz cuadrada A, se le puede asignar un número real que se denomina el determinante de A y se simboliza por det(A) o por $|A|$ y se calcula como se explica a continuación. Si A es de orden 1 entonces $det(A) = |a_{11}| = a_{11}$

Ejemplo 2.1 $|3| = 3$, $|-3| = -3$, $det(12) = 12$, $det(-8) = -8$

Si A es de orden 2×2 entonces $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 10 = 22$$

Si A es de tamaño $n \times n$

$$Det : M_{n\times n}(R) \longrightarrow R$$
$$A \longrightarrow |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$$
(desarrollo por la fila i)
$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}$$
(desarrollo por la columna j)

con $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ donde M_{ij} es la matriz que resulta de A al quitar la fila i y la columna j. $|M_{ij}|$ se llama menor complementario del elemento a_{ij} y A_{ij} se llama el cofactor del elemento a_{ij}

Ejemplo 2.2

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ entonces}$$

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$M_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$
$$M_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix};$$

El cálculo del determinante por la primera fila es

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = A_{11} + 2A_{12} + 3A_{13} =$$

$$= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\,(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\,(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -9$$

ya que

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8;$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10;$$

por lo tanto

$$|A| \;= 5 + 16 - 30 = -9$$

El cálculo del determinante por la segunda fila es

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 4A_{21} + 5A_{22} + 6A_{23}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5;$$
$$A_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4;$$

por lo tanto

$$|A| = -8 - 25 + 24 = -9$$

El cálculo del determinante por la tercera fila es

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = -9 \quad (Ejercicio)$$

Determinante de una matriz de 4x4:

Ejemplo 2.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

El cálculo del determinante por la primera fila es

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} =$$

$$= 1.A_{11} + 2.A_{12} + 3.A_{13} + 4.A_{14} = 4 + 2 - 6 + 4 = 4$$

ya que ;

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

2.1 Propiedades del determinante.

1. $|A| = \left|A^T\right|$

2. Si $A_{4\times 4}$, es una matriz triangular inferior entonces $|A| = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ pues

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43}7 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

Para el calculo del determinante de la transpuesta de A se procede en forma analoga y se obtiene.

$$\left|A^T\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ 0 & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{43} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

Ejemplo 2.4 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times 1 \times 5 = 30$

Ejemplo 2.5 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -8 & 8 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times 1 \times 8 = 48$

Ejemplo 2.6 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -8 & 8 \end{vmatrix} = 2 \times 0 \times 1 \times 8 = 0$

3.Sean A, B, C tres matrices iguales excepto la i-ésima fila, es decir, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots & a_{ij} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nj} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & \ldots & b_{ij} & \ldots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & a_{i3}+b_{i3} & \ldots & a_{ij}+b_{ij} & \ldots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces $|C| = |A| + |B|$. En efecto $|C| = (a_{i1} + b_{i1}) A_{i1} + (a_{i2} + b_{i2}) A_{i2} + \ldots + (a_{in} + b_{in}) A_{in} = = a_{i1}A_{i1} + b_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + b_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} + b_{in}A_{in} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{in}A_{in} + b_{i1}A_{i1} + b_{i2}A_{i2} + b_{in}A_{in} = |A| + |B|$

Ejemplo 2.7 $\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

Ejemplo 2.8 $\begin{vmatrix} a+b & c+d & e \\ h+l & f & g+k \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & e \\ h+l & f & g+k \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d & 0 \\ h+l & f & g+k \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} a & c & e \\ h & f & g \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & e \\ l & 0 & k \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d & 0 \\ h & f & g \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d & 0 \\ l & 0 & k \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 2.9 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

4. Si una matriz tiene una fila (o columna) nula entonces su determinante es cero $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34}$; con $a_{31} = 0$; $a_{32} = 0$; $a_{33} = 0$; $a_{34} = 0$.

Ejemplo 2.10 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

5. Si una fila de una matriz A, se multiplica por un número diferente de cero, su determinante queda multiplicado por ese número. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$ $\dfrac{1}{k}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ entonces $|B| = ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \cdots + ka_{in}A_{in} = k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) = k\,|A|$

Ejemplo 2.11

$$\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha ad - \alpha bc = \alpha\,(ad - bc) = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix} = 2 \times 2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

la propiedad anterior se puede generalizar por

$$|\alpha A_{n\times n}| = \alpha^n\,|A|$$

Ejemplo 2.12 *Si* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *y* $|A| = 4$ *entonces*

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2.2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2^2 \times 4$$

$$\text{b)}\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} = (-1)(-1)(-1)\,4 = -4$$

$$\text{c)}\begin{vmatrix} 2\alpha & 3\alpha \\ 4\beta & 5\beta \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4\beta & 5\beta \end{vmatrix} = \alpha \times \beta \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

6 Si se intercambian dos filas cualesquiera en una matriz, su determinante cambia de signo.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces

$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$ con $A_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$ y

$|B| = a_{i1}B_{i+11} + a_{i2}B_{i+12} + ... + a_{in}B_{i+1n}$ con $B_{i+1j} = (-1)^{i+1+j}\,|M_{ij}|$

$= -(-1)^{i+j}\,|M_{ij}| = -A_{ij}$

por tanto $|B| = -\,|A|$

Ejemplo 2.13 $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 18, \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -18$

Ejemplo 2.14 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

7 Si una matriz tiene 2 filas iguales su determinante vale cero.

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{y } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

que se obtuvo de A al intercambiar la fila 1 por la fila 2, así $|B| = -|A|$ pero como $|B| = |A|$,entonces $-|A| = |A|$ luego $2|A| = 0$ y así $|A| = 0$.

Ejemplo 2.15

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 6 & 7 & 9 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

8 Si una fila de una matriz es múltiplo de otra fila, el determinante de la matriz es cero.

Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ g & h & i \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = k \times 0 = 0$$

Ejemplo 2.16

Para la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ 6 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

tenemos que la fila 2 es multiplo de la primera fila, por consiguiente tenemos que el determinante es cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ 6 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo 2.17 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \\ 6 & 12 & 18 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 8 & 1 \\ 10 & 20 & 30 \end{vmatrix} = 0$

9 Si una fila de una matriz se multiplica por un número diferente de cero y se le suma a otra fila, su determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{11}+a_{21} & ka_{12}+a_{22} & \cdots & ka_{1n}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ pues}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$k0 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 2.18

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}_{-2f_2+f_1} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 2.19

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & l \end{vmatrix}_{2f_1+f_2} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ h & i & l \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ h & i & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & l \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ h & i & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & l \end{vmatrix} =$$

$$0 + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & l \end{vmatrix}$$

Ejemplo 2.20

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}_{\substack{-3f_1+f_2 \\ -2f_1+f_3 \\ -2f_1+f_4}} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}_{\substack{-3f_4+f_3 \\ -6f_4+f_2}}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}_{-2f_3+f_2} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}_{3f_2+f_3} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}_{f_4 \longleftrightarrow f_2}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}_{f_4 \longleftrightarrow f_3} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} = 2 \times (-16) = -32$$

Ejemplo 2.21

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{f_1 \longleftrightarrow f_4} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{f_1 \longleftrightarrow f_4} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

10 $|AB| = |A|\,|B|$

11 La adjunta de una matriz A es la transpuesta de la matriz de los cofactores de A, es decir, si A es de orden 3 entonces

$$adj A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.22 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces $|A| = 6$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6, A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0, A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -9, A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \; A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

por tanto

$$adj A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$A adj A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 6 & -9 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y asi se tiene que

$$A \; (adj \; A) = (adj \; A) \, A = |A| \, I \Rightarrow A^{-1} = \frac{adj \; A}{|A|}$$

Ejemplo 2.23

Hallar la inversa de 3 formas diferentes.

Primer metodo para hallar la inversa.

si.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Se halla el determinante.

Por la primera fila $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 0A_{11} + 2A_{12} + 3A_{13} = -2 + 3 = 1$

pues

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2+3) = -1$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2+3 = 1$$

Por la segunda fila $|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = -A_{21} - 3A_{22} - 3A_{23} =$

$= -2 + 3 \times 3 - 3 \times 2 = -2 + 9 - 6 = 1$ pues

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(4-6) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$$

Por la tercera fila $|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} =$

$= A_{31} + 2A_{32} + 2A_{33} = 3 - 6 + 4 = 1$ pues

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -6+9 = 3$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -(0+3) = -3$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0+2 = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = adj\ A$$

$$adj\ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

por tanto

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Segundo metodo para hallar la inversa

Partiendo de la matriz A, por medio de operaciones elementales en filas, se lleva la matriz A a la identica y la inversa será $E_k ... E_3 E_2 E_1$ el producto de las matrices elementales en este orden. Como $I = E_k ... E_3 E_2 E_1 A$ entonces $E_k ... E_3 E_2 E_1 = A^{-1}$.

Ejemplo 2.24

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{f_3+f_2}{\overset{E_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{2f_2+f_1}{\overset{E_2}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{f_1+f_2}{\overset{E_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{-2f_1+f_3}{\overset{E_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2f_2+f_3}{\overset{E_5}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{-f_2}{\overset{E_6}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{f_1 \longleftrightarrow f_3}{\overset{E_7}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = E_{7\times} E_{6\times} E_{5\times} E_{4\times} E_{3\times} E_{2\times} E_{1\times} A \ \text{ donde } A^{-1} = E_{7\times} E_{6\times} E_{5\times} E_{4\times} E_{3\times} E_{2\times} E_1$$

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Se debe multipicar todas las matrices elementales para obtener la inversa

Tercer metodo para hallar la inversa

Ejemplo 2.25

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

entonces se escribe la matriz

$(A|I) \sim\sim\sim\sim (I|A^{-1})$ asi

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -3 \,|\, & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{f_3+f_2} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \,|\, & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\substack{2f_2+f_1 \\ 2f_2+f_3}} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \,|\, & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{f_1+f_2} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \,|\, & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{\substack{-f_2 \\ f_3 \longleftrightarrow f_1}} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \,|\, & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \left(I|A^{-1}\right) \quad luego \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.26 *Para que valores de a la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

tiene inversa

En efecto la matriz A tiene inversa para los valores de a, donde el determinante es diferente de cero

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 7 - 7a = 0 \quad si \quad a = 1 \text{ (ejercicio calcule el determinante)}$$

luego la matriz A tiene inversa para todo $a \neq 1$

Ejemplo 2.27 *Para que valores de a la matriz* $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$ *tiene inversa*

En efecto, la matriz A tiene inversa para los valores de a, donde el determinante es diferente de cero y

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = -a^3 - a^2 + 6a = -a\left(a^2 + a - 6\right) = -a\left(a+3\right)\left(a-2\right) = 0 \text{ si}$$

$a = 0, a = -3, a = 2$, luego la matriz A tiene inversa para todo $a \neq 0, a \neq -3, a \neq 2$

Ejemplo 2.28 *Para que valores de a la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

tiene inversa

En efecto, la matriz A tiene inversa para los valores de a, donde el determinante es diferente de cero, luego

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2f_1 + f_2 \\ f_1 + f_3 \\ f_1 + f_4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & 4 \\ a+1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12=}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ a+1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\left(8a - 16\right) = 0 \; sisi \quad a = 2$$

luego la matriz A tiene inversa para todo $a \neq 2$

Ejemplo 2.29 *Demostrar que*

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = (3+3x)(3-x)^3$$

En efecto

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+3x & x & x & x \\ 3+3x & 3 & x & x \\ 3+3x & x & 3 & x \\ 3+3x & x & x & 3 \end{vmatrix} = (3+3x)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 3 & x & x \\ 1 & x & 3 & x \\ 1 & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (3+3x)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (3+3x)(3-x)\,3-x)(3-x)\,.$$

A la columna 1 le sumamos las demás, sacamos 3+3x factor comun de la primera columna, primera fila por menos 1 y la sumamos a las demas y queda una matriz triangular cuyo determinante es el producto de los elementos de la diagonal.

Ejemplo 2.30 *Verificar que*

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

En efecto

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}_{f_3+f_2} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$$

$$= 5(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo 2.31 *Verificar que*

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

En efecto

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 2a-2b & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab-b^2 \\ 2a-2b & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

-columna 3 + columna 1, -columna 3 + columna 2 y desarrollamos el determinante por la tercera fila.

Ejemplo 2.32 *Demostrar que*

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

En efecto

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} bca & a^2 & a^3 \\ acb & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

Se hizo primera fila por a, segunda fila por b y tercera fila por c

Ejemplo 2.33 *Verificar que*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

En efecto $(-af_1 + f_2, -a^2 f_1 + f_3, -a^3 f_1 + f_4)$, *luego* $-c_1 + c_{2,} - c_1 + c_{3.}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ 0 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac-b^2-ab & d^2+ad-ab-b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c^2-b^2+a(c-b) & d^2-b^2+a(d-b) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ (c-b)(c+b+a) & (d-b)(d+b+a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (c+b+a) & (d+b+a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\,c{-}b)(d-b)(d-c) = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

Ejemplo 2.34 *Verificar que*

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix}$$

En efecto

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = \frac{abcd}{abcd}\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = \frac{bcd}{abcd}\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & abcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix}$$

$$= \frac{cd}{abcd}\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & abcd \\ b^3 & b^2 & b & bacd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = \frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & abcd \\ b^3 & b^2 & b & bacd \\ c^3 & c^2 & c & cabd \\ d^3 & d^2 & d & dabc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 2.35 *Para que valor de x se anula el determinante*

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

En efecto,sume a la primera columna las demás,

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 & 1 \\ 2-x & -x & 1 & 0 \\ 2-x & 1 & -x & 1 \\ 2-x & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = (2-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

$$= (2-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -x-1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -x-1 \end{vmatrix} = (2-x)\begin{vmatrix} -x-1 & 1 & -1 \\ 0 & -x & 0 \\ -1 & 1 & -x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (2-x)(-x)\begin{vmatrix} -x-1 & -1 \\ -1 & -x-1 \end{vmatrix} = (2-x)(-x)\left((x+1)^2-1\right) = 0$$

sisi $x = 0$ y $x = \pm 2$, luego los valores de x para los cuales el determinante es cero son 0 y ± 2.

Ejemplo 2.36 *Para que valores de a,b,c el*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} = 0.$$

En efecto

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = abc \times 0 = 0$$

luego para cualquier valor de a,b,c el determinante es cero

Ejemplo 2.37 *Hallar el valor de*

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

En efecto

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}_{c_1+c_2+c_3+c_4\to c_1} = \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3$$

Ejemplo 2.38 *Solucionar la ecuacion*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

En efecto

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-1 \end{vmatrix} = (x-1)\left(x^2-1\right) = 0$$

entonces $x = 1$, $x = -1$

Ejemplo 2.39

Si $|A^{-1}| = 4 \Rightarrow |A| = \frac{1}{4}$

En efecto $AA^{-1} = I$ entonces $|AA^{-1}| = 1$ luego $|A|\,|A^{-1}| = 1$ y asi $|A| = \frac{1}{4}$

Ejemplo 2.40

$$\text{Si } \left|A^{-1}_{3\times 3}\right| = 4 \Rightarrow |2A^{-1}| = 2^3\,|A^{-1}| = 2^3 \times 4$$

Ejemplo 2.41

Si A es involutiva entonces $|A| = \pm 1$

Como $A^2 = I$ entonces $|A^2| = 1$ por lo tanto $|AA| = 1$ es decir

$|A|\,|A| = 1$ *entonces* $|A|^2 = 1$ *y* asi $|A| = \pm 1$

Ejemplo 2.42

El Determinante de una matriz idempotente es 0 ó 1.*Como*

$$A^2 = A \Longleftrightarrow |A|^2 = |A| \Longleftrightarrow |A|^2 - |A| = 0 \therefore |A| (|A| - 1) = 0$$

$$\text{luego } |A| = 0 \ \text{ o } \ |A| = 1$$

Ejemplo 2.43

El determinante de una matriz ortogonal es ± 1.
Como

$$AA^T = A^T A = I \Leftrightarrow \left|AA^T\right| = 1 \Leftrightarrow |A| \left|A^T\right| = 1$$

por lo tanto

$$por\ lo\ \ |A|^2 = 1 \therefore |A| = \pm 1$$

2.2 EJERCICIOS PROPUESTOS CAPITULO 2

1. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$ hallar

   (a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ resp -36

   (b) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ resp 6

   (c) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ resp -6

   (d) $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ resp 6

   (e) $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$ resp -6

2. Si $A_{3\times 3}$ y $|A| = 2$, calcular
   a.$|2A|$ b. $|A^{-1}|$ c. $|2A^{-1}|$ d. $|(2A)^{-1}|$ Resp a) 16 b) $\frac{1}{2}$ c) 4 d) $\frac{1}{16}$

3. Demostrar que . $\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

4. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + ta_1 & c_1 + rb_1 + sa_1 \\ a_2 & b_2 + ta_2 & c_2 + rb_2 + sa_2 \\ a_3 & b_3 + ta_3 & c_3 + rb_3 + sa_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. Demostrar que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

6. Demostrar que $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+d \\ 1 & 1 & 1 \\ b+1 & c+1 & d+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \end{vmatrix}$

7. Demostrar que $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$ $(f_2+f_1, f_3+f_1, -c_1+c_3, -c_1+c_2$

8. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ *hallar*

   a. $adjA$ b.$adjA^{-1}$ c. $AadjA$. c. $A^{-1}adjA^{-1}$ d. Es $adjA = adjA^{-1}$? Resp $adjA = \begin{pmatrix} -20 & 2 & 3 \\ 11 & -6 & -9 \\ -28 & -7 & 14 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{20}{49} & -\frac{2}{49} & -\frac{3}{49} \\ -\frac{11}{49} & \frac{6}{49} & \frac{9}{49} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$, $adjA^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{49} & -\frac{1}{49} & 0 \\ \frac{2}{49} & -\frac{4}{49} & -\frac{3}{49} \\ -\frac{5}{49} & -\frac{4}{49} & \frac{2}{49} \end{pmatrix}$

9. Para que valores de a real la matriz $A = \begin{pmatrix} -a & a-1 & a+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-a & a+3 & a+7 \end{pmatrix}$ tiene inversa.

   Resp ningun valor de a

10. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ Explicar 4 métodos diferentes para hallar A^{-1} y cual es la inversa. Resp $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{16}{15} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{15} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

11. Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}$ respuesta -546

12. Demostrar que $|A^n| = |A|^n$.

    Si A y B son invertibles de orden n, demostrar que:

(a) $adj(adj\,(A)) = |A|^{n-2}\,A$

(b) $adj(kA) = k^{n-1}adj(A)$ donde k es un escalar.

(c) $adj(AB) = adj(B)adj(A)$

13. Si A es inversible de orden n, probar que:

    (a) $\det\,[adj(adj\,(A))]\det\,[adj(adj\,(A^{-1}))] = 1$

    (b) $\det\,[adj(adj\,(A))] = |A|^{(n-1)^2}$

    (c) $\det\,[adj(A^{-1}adj\,(A))] = |A|^{(n-1)(n-2)}$

    (d) $\det\,[adj(Aadj\,(A^{-1}))] = |A|^{-(n-1)(n-2)}$

    (e) $\det\,[adj(A)]\det\,[A^{-1}adj(A^{-1})] = \dfrac{1}{|A|}$

    (f) $adj(adj(A)) = |A|^{n-2}\,A$

14. Demostrar que $|adjA| = |A|^{n-1}$.

15. Es $|A+B| = |A| + |B|$? resp No

Capítulo 3

SISTEMAS DE ECUACIONES.

Veamos algunos ejemplos de sistemas de ecuaciones

Ejemplo 3.1 $x = 2$ *Es un sistema de una ecuación y de una variable.*

Ejemplo 3.2 $x+y = 1$ *Es un sistema de una ecuación, dos variables y se puede escribir como*

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$, si se conoce y se puede conocer x y viceversa, en este caso se dice que el sistema tiene una variable libre que puede ser x o y, si x es la variable libre (a la que se le puede asignar cualquier valor) entonces por ejemplo si $x = t$, $y = 1 - t$, por lo tanto el conjunto solución del sistema es $\{(t, 1-t)\,/t \in \mathbb{R}\}$, luego el sistema $x + y = 1$ tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 3.3 $x + y - z = 4$ *es un sistema de una ecuación, tres variables y se puede escribir como* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4$ *si se conoce por ejemplo y,z se puede conocer x en este caso se dice que el sistema tiene dos variable libres que puede ser z o y. si y, z son variables libres (a la que se le puede asignar cualquier valor) por ejemplo* $z = u, y = n$ *entones*

$x = 4 + z - y = 4 + u - n$ *por tanto la solucion es* $Sol = \{(4 + u - n, n, u)\,/u, n \in \mathbb{R}\}$ *luego el sistema*

$x + y - z = 4$ *tiene infinitas soluciones.*

Ejemplo 3.4 *El sistema*

$$\begin{array}{c} x-y+2z=5 \\ x+3z+u=0 \\ 4x-3y+v=3 \end{array} \quad \text{se puede escribir} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ es decir,}$$

$$AX = B$$

Ejemplo 3.5 *En general cualquier sistema lineal de ecuaciones se puede escribir en forma matricial como*
$AX = B$.

Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes, si cada ecuacion de cada sistema es combinacion lineal de las ecuaciones del otro sistema y esto se da si se hacen operaciones elementales en filas en la mtriz ampliada $(A|B)$ para obtener $(M|N)$,es decir, los sistemas de ecuaciones en este caso $AX = B$ y $MX = N$ son equivalentes (En otras palabras si las matrices ampliadas son semejantes, sus respectivos sistemas son equivalentes) y si dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes tienen las mismas soluciones. Asi si
$(A|B) \sim\sim\sim\sim\sim\sim (D|C)$ entonces los sistemas $AX = B$ y $DX = C$ son equivalentes y por lo tanto tienen las mismas soluciones.
Un sistema de ecuaciones es lineal si es de la forma

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = y_2 \\ . \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = y_i \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = y_n \end{array} \quad \text{donde } a_{ij}\ , y_i \text{ son numeros Reales o complejos}$$

$$\text{Los sistemas} \quad \begin{array}{c} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 6 \\ 8x_1 + x_2 + x_3 = -3 \end{array} , \quad \begin{array}{c} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ -5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 7x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} , \quad \begin{array}{c} 13x_1 + 25x_2 - x_3 = 44 \\ -7x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 6 \\ 8x_1 + 10x_2 + x_3 = -23 \end{array}$$

son lineales

$$\text{Los sistemas} \quad \begin{array}{c} 3x_1x_2 + 5x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 6 \\ 8x_1 + x_2 + x_3 = -3 \end{array} ,$$

$$\begin{array}{c} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ -5x_1 + 4x_2^2 + 2x_3 = 0 \\ 7x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} , \quad \begin{array}{c} 13\sqrt{x_1} + 25x_2 - x_3 = 44 \\ -7x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 6 \\ 8x_1 + 10x_2 + x_3 = -23 \end{array} ,$$

$$\begin{array}{c} \sin(x_1) + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ -5x_1 + 4x_2^2 + 2x_3 = 0 \\ 7x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} , \quad \begin{array}{c} \log(x_1) + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ -5x_1 + 4x_2^2 + 2x_3 = 0 \\ 7x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} , \quad \begin{array}{c} x_1 + e^{5x_2} - 4x_3 = 0 \\ -5x_1 + 4x_2^2 + 2x_3 = 0 \\ 7x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} \quad \text{no son}$$

lineales

3.1 Clasificacion del sistema $AX = B$

El sistema $AX = B$, se clasifica en

1. Si $B = 0$; es decir, $AX = 0$ se llama sistema homogéneo y tiene solución única o infinitas soluciones.
2. Si $B \neq 0$ el sistema $AX = B$ se llama sistema no homogéneo Si el sistema es no homogeneo puede suceder que tenga solución única, infinitas soluciones ó no tenga solución.

3.2 Solución del sistema $Ax = B$.

Para solucionar el sistema $AX = B$, se construye la matriz ampliada y con operaciones elementales en fila se lleva la matriz A, a una matriz escalonada (Lo anterior se conoce con el nombre de método de Gauss,para solucionar sistemas de ecuaciones),

$$(A|B) \sim\sim\sim\sim\sim\sim (Escalonada|C)$$

Si llevo la matriz A a una matriz escalonada reducida, se tiene el método de Gauss-Jordan.

$$(A|B) \sim\sim\sim\sim\sim\sim (Escalonada\ reducida|D)\,.$$

Ejemplo 3.6 *Solucionar el sistema* $\begin{array}{c} x+y=4 \\ x-y=4 \end{array}$,

aplicando operaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada se obtiene.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 4 \\ 1 & -1 & | & 4 \end{pmatrix}_{-f_1+f_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}_{-\frac{f_2}{2}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} x+y=4 \\ y=0 \end{array}$$

y este sistema tiene por solucion $(4,0)$ *y así el sistema* $\begin{array}{c} x+y=4 \\ x-y=4 \end{array}$ *tiene solución única* $(4,0)$, *notar que se trata de dos rectas del plano que se cortan en un solo punto y esta es la solucion del sistema.*

Ejemplo 3.7 *Solucionar el sistema* $\begin{array}{c} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{array}$,

como la segunda ecuación es múltiplo de la primera, el sistema tiene infinitas soluciones.

En efecto,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \end{array}\right)_{-2f_1+f_2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x+y=4$$

luego y puede tomar cualquier valor, por ejemplo $y=t$*, y asi* $x=4-y=4-t$*, por lo tanto el sistema* $\begin{array}{c} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{array}$

tiene infinitas soluciones $\{(4-t,t)\,/t\in R\}$*. El sistema esta formado por dos rectas que en este caso son paralelas y coiciden*

Ejemplo 3.8 *Solucionar el sistema* $\begin{array}{c} x+y=4 \\ 2x+2y=6 \end{array}$,

En efecto,

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{array}\right)_{-2f_1+f_2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ *entonces* $x+y=4$ *y* $0=2$ *por lo tanto el sistema* $\begin{array}{c} x+y=4 \\ 2x+2y=6 \end{array}$ *no tiene solucion, luego el sistema* $\begin{array}{c} x+y=4 \\ 2x+2y=6 \end{array}$ *tampoco*

El sistema esta formado por dos rectas que en este caso son paralelas.

Ejemplo 3.9 *Solucionar el sistema*

$$\begin{array}{c} 3x-5y+4z=1 \\ 2x+y-5z=2 \\ 2x+y-5z=8 \\ 3x-5y+4z=1 \end{array}$$

se forma la matriz ampliada y se le aplican las operaciones elementales a las filas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 8 \\ 3 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ -f_2+f_3 \\ -f_1+f_4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y el sistema correspondiente es

$\begin{array}{c} 3x-5y+4z=1 \\ 2x+y-5z=2 \\ 0x+0y+0z=6 \\ 0x+0y+0z=0 \end{array}$ *y Como* $0\neq 6$*, este sistema no tiene solución y por lo tanto el sistema* $\begin{array}{c} 3x-5y+4z=1 \\ 2x+y-5z=2 \\ 2x+y-5z=8 \\ 3x-5y+4z=1 \end{array}$ *no tiene solución*

Ejemplo 3.10 *Solucionar el sistema*

$$\begin{gathered} x+y-z=5 \\ 2x-3y+z=0 \\ x+y-z=5 \end{gathered}$$

se forma la matriz ampliada y mediante operaciones elementales en filas se transforma en una matriz escalonada, se escribe el sistema que corresponde a esta matriz y se soluciona, solucion que tambien correspnde al sistema original asi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & \mid 0 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}_{\substack{-2f_1+f_2 \\ -f_1+f_3}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & \mid -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{-\frac{f_2}{5}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \mid 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{gathered} x+y-z=5 \\ y-\tfrac{3}{5}z=2 \end{gathered}$$

Si $z=t$, $y=2+\frac{3}{5}z=2+\frac{3}{5}t$, $x=5+t-2-\frac{3}{5}t=3+\frac{2}{5}t$ *por lo tanto la solucion de este sistema es*

$\left\{\left(3+\frac{2}{5}t, 2+\frac{3}{5}t, t\right) t\in\mathbb{R}\right\}$, *que coorresponde a la solucion del sistema*

$$\begin{gathered} x+y-z=5 \\ 2x-3y+z=0 \\ x+y-z=5 \end{gathered}$$

Ejemplo 3.11 *Solucionar el sistema*

$$\begin{gathered} x_1+2x_2+3x_3=5 \\ 2x_1+5x_2+3x_3=3 \\ x_1+8x_3=17 \end{gathered}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & \mid 3 \\ 1 & 0 & 8 & 17 \end{pmatrix}_{\substack{-2f_1+f_2 \\ -f_1+f_3}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & \mid -7 \\ 0 & -2 & 5 & 12 \end{pmatrix}_{2f_2+f_3} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & \mid -7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}_{-f_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & \mid -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \textit{ luego}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_2 - 3x_3 &= -7 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

por lo tanto $x_2 = 3x_3 - 7 = 3 \times 2 - 7 = -1$, $x_1 = 5 - 2x_2 - 3x_3 = 5 - 2 \times (-1) - 3 \times (2) = 5 + 2 - 6 = 1$. *Luego la solución del sistema es* $(1, -1, 2)$

Ejemplo 3.12 *Hallar el valor de* k *tal que el sistema*

$$\begin{aligned} kx + y + z &= 1 \\ x + ky + z &= 1 \\ x + y + kz &= 1 \end{aligned}$$

tenga , Solución única, Ninguna solución, Infinitas soluciones

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \mid & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}_{f_3 <-> f_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 \mid & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{-f_1 + f_2,\ -kf_1 + f_3} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & -1 + k & -k + 1 \mid & 0 \\ 0 & -k + 1 & 1 - k^2 & -k + 1 \end{pmatrix}_{f_2 + f_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & -1 + k & -k + 1 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & (1 - k)(2 + k) & 1 - k \end{pmatrix}$$

luego si $k = 1$, *el sistema tiene infinitas soluciones, si* $k = -2$ *el sistema no tiene solución, y si* $k \neq 1$ *y* $k \neq -2$ *el sistema tiene solución única.*

Ejemplo 3.13 *Hallar el valor de* a *tal que el sistema*

$$\begin{aligned} 3x - y + az &= 0 \\ x - z &= a + 1 \\ -ax + y &= -a \end{aligned}$$

tenga , Solución única, Ninguna solución, Infinitas soluciones

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & a & 0 \\ 1 & 0 & -1 \mid & a + 1 \\ -a & 1 & 0 & -a \end{pmatrix}_{-3f_2 + f_1} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & a + 3 & -3(a + 1) \\ 1 & 0 & -1 \mid & a + 1 \\ -a & 1 & 0 & -a \end{pmatrix}_{af_2 + f_3} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a + 3 & -3(a + 1) \\ 1 & 0 & -1 \mid & a + 1 \\ 0 & 1 & -a & a^2 \end{pmatrix}_{f_2 \leftrightarrow f_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & a + 1 \\ 0 & -1 & a + 3 \mid & -3(a + 1) \\ 0 & 1 & -a & a^2 \end{pmatrix}_{f_3 + f_2} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & & a+1 \\ 0 & 0 & 3 & | & a^2-3a-3 \\ 0 & 1 & -a & & a^2 \end{pmatrix}_{f_3 \leftrightarrow f_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & & a+1 \\ 0 & 1 & -a & | & a^2 \\ 0 & 0 & 3 & & a^2-3a-3 \end{pmatrix}$$

luego para cualquier valor de a el sistema tiene solución única

Ejemplo 3.14 *Hallar el valor de a tal que el sistema*

$$\begin{gathered} 3x-(a+2)\,y+2z=a+1 \\ 2x-5y+3z=1 \\ x+3y-(a+1)\,z=0 \end{gathered}$$

tenga , Solución única, Ninguna solución, Infinitas soluciones

$$\begin{pmatrix} 3 & -(a+2) & 2 & & a+1 \\ 2 & -5 & 3 & | & 1 \\ 1 & 3 & -(a+1) & & 0 \end{pmatrix}_{f_1 \longleftrightarrow f_3} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -(a+1) & & 0 \\ 2 & -5 & 3 & | & 1 \\ 3 & -(a+2) & 2 & & a+1 \end{pmatrix}_{-2f_1+f_2} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -a-1 & & 0 \\ 0 & -11 & 2a+5 & | & 1 \\ 3 & -a-2 & 2 & & a+1 \end{pmatrix}_{-3f_1+f_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -a-1 & & 0 \\ 0 & -11 & 2a+5 & | & 1 \\ 0 & -a-11 & 3a+5 & & a+1 \end{pmatrix}_{-f_2+f_3} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -a-1 & & 0 \\ 0 & -11 & 2a+5 & | & 1 \\ 0 & -a & a & & a \end{pmatrix}_{af_2,-11f_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -a-1 & & 0 \\ 0 & -11a & 2a^2+5a & | & a \\ 0 & 11a & -11a & & -11a \end{pmatrix}_{f_2+f_3} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -a-1 & & 0 \\ 0 & -11a & 2a^2+5a & | & a \\ 0 & 0 & 2a^2-6a & & -10a \end{pmatrix}$$

luego si $a = 0$ el sistema tiene infinitas soluciones,si $a = 3$ el sistema no tiene solución y si $a \neq 0$ y $a \neq 3$ el sistema tiene solución única.

Ejemplo 3.15 *Hallar el valor de a tal que el sistema*

$$\begin{gathered} x+2y+(a+3)\,z=8 \\ 2x+3y+(a+4)\,z=12 \\ 3x+(6a+5)\,y+7z=20 \end{gathered}$$

tenga , Solución única, Ninguna solución, Infinitas soluciones

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & a+3 & 8 \\ 2 & 3 & a+4 \mid & 12 \\ 3 & 6a+5 & 7 & 20 \end{array}\right)_{-2f_1+f_2} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & a+3 & 8 \\ 0 & -1 & -a-2 \mid & -4 \\ 3 & 6a+5 & 7 & 20 \end{array}\right)_{-3f_1+f_3} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & a+3 & 8 \\ 0 & -1 & -a-2 \mid & -4 \\ 0 & 6a-1 & -3a-2 & -4 \end{array}\right)_{-f_2+f_3} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & a+3 & 8 \\ 0 & -1 & -a-2 \mid & -4 \\ 0 & 6a & -2a & 0 \end{array}\right)_{6af_2+f_3} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & a+3 & 8 \\ 0 & -1 & -a-2 \quad \mid & -4 \\ 0 & 0 & -6a^2-14a & -24a \end{array}\right)_{-f_3} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & a+3 & 8 \\ 0 & -1 & -a-2 \quad \mid & -4 \\ 0 & 0 & 2a\,(3a+7) & 24a \end{array}\right)$$

luego si $a = 0$*, el sistema tiene infinitas soluciones, si* $a = -\frac{7}{3}$*, no hay solución y si* $a \neq 0$ *y* $a \neq -\frac{7}{3}$*, el sistema tiene solución única.*

3.3 Regla de Cramer

Este metodo se aplica solo cuando el determinante de la matriz $A_{n\times n}$ sea difrente de cero

Ejemplo 3.16 *Solucionar el sistema por la regla de cramer*

$$\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 8x_3 = 17 \end{array}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 17 & 0 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}} = 1; \; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 17 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}} = -1; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 17 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}} = 2$$

Ejemplo 3.17 *Solucionar el sistema*

$$\begin{aligned} 4x + y + z + w &= 6 \\ 3x + 7y - z + w &= 1 \\ 7x + 3y - 5z + 8w &= -3 \\ x + y + z + 2w &= 3 \end{aligned}$$

Resolviendo primero por metodo de eliminación.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 7 & -1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)_{\substack{-7f_4+f_3 \\ -3f_4+f_2 \\ -4f_4+f_1}} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & -3 & -7 & -6 \\ 0 & 4 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & -4 & -12 & -6 & -24 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)_{\substack{f_3+f_2 \\ -f3+f_1}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 9 & -1 & 18 \\ 0 & 0 & -16 & -11 & -32 \\ 0 & -4 & -12 & -6 & -24 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)_{4f_1+f_3}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 9 & -1 & 18 \\ 0 & 0 & -16 & -11 & -32 \\ 0 & 0 & 24 & -10 & 48 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)_{\frac{f_3}{2}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 9 & -1 & 18 \\ 0 & 0 & -16 & -11 & -32 \\ 0 & 0 & 12 & -5 & 24 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)_{f_3+f_2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 9 & -1 & 18 \\ 0 & 0 & -4 & -16 & -8 \\ 0 & 0 & 12 & -5 & 24 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)_{\frac{f_2}{-4}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 9 & -1 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -5 & 24 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)_{-12f_2+f_3}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 9 & -1 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -53 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)_{\frac{f_3}{-53}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & -1 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{ll} x+y+z+2w=3 & \rightarrow x=3-2w-z-y=1 \\ y+9z-w=18 & \rightarrow y=w-9z+18=0 \\ z+4w=2 & \rightarrow z=2-4w=2 \\ w=0 & \rightarrow w=0 \end{array}\right\} \quad Sol\,(1,0,2,0)$$

Por la regla Cramer:

$$w=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 7 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=0 \qquad x=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -5 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=0 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -3 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=2$$

Ejemplo 3.18 *Hallar condiciones para a y b de tal forma que el sistema*

$$\begin{array}{c} x+2y=a \\ x-3y=b \end{array}$$

tenga solución.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 1 & -3 & b \end{array}\right)_{-f_1+f_2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -5 & b-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & \left(\dfrac{a-b}{5}\right) \end{array}\right)$$

El sistema siempre tiene solución para cualquier valor de a y de b

Ejemplo 3.19 *Hallar condiciones para* a *y* b *de tal forma que el sistema*

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ 2x + 2y &= b \end{aligned}$$

tenga solución.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & b \end{array} \right)_{-2f_1+f_2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & b-2a \end{array} \right)_{-f_1+f_2}$$

luego

a) Si $b - 2a = 0$ el sistema tiene infinitas soluciones.

b) Si $b - 2a \neq 0$ el sistema no tiene solución.

3.4 EJERCICIOS PROPUESTOS CAPITULO 3

1. Que condiciones deben cumplir a,b y c para que el sistema $\begin{array}{c} x+y+2z=a \\ x+z=b \\ 2x+y+3z=c \end{array}$ tenga solución. Res $c=a+b$

2. Cómo debe elegir los coeficientes a,b,c de modo que el sistema $\begin{array}{c} ax+by-3z=-3 \\ -2x-by+cz=-1 \\ ax+3y-cz=-3 \end{array}$ tenga por solución $(1,-1,2)$. Resp $(2,-1,1)$

3. Solucionar los sistemas si es posible, por Gauss, Gauss Jordan, Regla de Cramer y $x=A^{-1}b$

   (a) $\begin{array}{c} 2x+y-2z=10 \\ 3x+2y+2z=1 \\ 5x+4y+3z=4 \end{array}$, Resp $[x=1,y=2,z=-3]$

   (b) $\begin{array}{c} x+y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ x-4y+2z=0 \end{array}$, Resp $\left[x=\frac{2}{5}z, y=\frac{3}{5}z\right]$

   (c) $\begin{array}{c} 2x-3y+6z+2v-5w=3 \\ y-4z+v=1 \\ v-3w=2 \end{array}$, Resp $\left\{\left[v=4z-y+1, w=\frac{4}{3}z-\frac{y}{3}-\frac{1}{3}, x=\frac{5}{3}y-\frac{11}{3}z-\frac{1}{3}\right]\right\}$

   (d) $\begin{array}{c} 4x+6y+3z+3v=-5 \\ 4x+7y+3z+3v=-8 \\ 2x+5y+4z+3v=17 \\ 5x+8y+4z+4v=-6 \end{array}$ Resp $[v=-8,x=-2,y=-3,z=15]$

   (e) $\begin{array}{c} 4x-4y+4z+3v=14 \\ 6x+4y+3z+3v=14 \\ 3x-6y+4z+3v=12 \\ 6x-3y+5z+4v=18 \end{array}$, Resp $[v=-6,x=-2,y=2,z=12]$

   (f) $\begin{array}{c} 3x-3y+7z+3v=-7 \\ 4x+3y+4z+2v=13 \\ 2x-3y+7z+3v=-5 \\ 4x-2y+9z+4v=-1 \end{array}$, Resp $[v=-7,x=-2,y=5,z=5]$

4. Dada una matriz A de orden n por n, que conclusión se deduce de los enunciados siguientes

   (a) A tiene inversa

   (b) A es semejante a la matriz idéntica

   (c) $|A| \neq 0$

   (d) La forma escalonada reducida de A es la matriz idéntica

   (e) El sistema $Ax = b$ tiene solución única

   (f) El sistema $Ax = 0$ tiene solución única y es la solución nula. Resp Equivalentes

5. Dar un ejemplo de un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que:

   (a) Tenga solución única.

   (b) No tenga solución

   (c) Tenga infinitas soluciones.

6. Sea $Ax = b$ un sistema de n ecuaciones con n incognitas donde A tiene sus elementos enteros probar que si $|A| = 1$ entonces la solución son elementos

   enteros.

7. Dados los sistemas de ecuaciones lineales:

   $$\begin{array}{c} x + y + 2z = -1 \\ x - 2y + z = -5 \\ 3x + y + z = 3 \end{array} \quad \text{Resp } [x = 1, y = 2, z = -2]$$

   $$\begin{array}{c} 2x + y + 2z + 3w = 13 \\ x - 2y + z + w = 8 \\ 3x + y + z - w = 1 \end{array} \quad \text{, Resp } \left[w = \tfrac{94}{27} - \tfrac{10}{27}z, x = \tfrac{52}{27} - \tfrac{13}{27}z, y = \tfrac{2}{27}z - \tfrac{35}{27}\right]$$

   (a) Hallar todas las soluciones, si existe alguna, usando el metodo de eliminación de Gauss.

   (b) Hallar todas las soluciones, si existe alguna, usando el metodo de reducción Gauss-Jordán.

8. Dar un ejemplo de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que no tenga solución.

9. Hallar una matriz escalonada reducida por filas que sea equivalentes a la matriz:
$A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 2 & 2 \\ i & 1+i \end{pmatrix}$
¿Cuales son las soluciones de $Ax = 0$?

10. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$
¿Para cuáles ternas (y_1, y_2, y_3), tiene una solución el sistema $AX = Y$?

11. Si $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
Hallar todas las soluciones de $AX = 2X$, y todas las soluciones de $AX = 3X$.

12. Hallar los valores de la constante a para que el sistema a) Tenga Solución única b) No tenga Solución c) Tenga infinitas soluciones

13. $\begin{array}{c} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{array}$ respuesta $a \neq -3, 2, a = -3, a = 2$

14. $\begin{array}{c} x + 2y + az = 1 \\ 2x + ay + 8z = 3 \end{array}$ respuesta $a = 4$ no tiene solucion , $a \neq 4$ infinitas

15. $\begin{array}{c} x + y + az = 2 \\ 3x + 4y + 2z = a \\ 2x + 3y - z = 1 \end{array}$ respuesta $a \neq 3$ unica, $a = 3$ infinitas

16. $\begin{array}{c} x - 3z = -3 \\ 2x + ay - z = -2 \end{array}$ respuesta infinitas para cualquier valor de a

17. $\begin{array}{c} x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + (a^2 - 5)\, z = a \end{array}$ respuesta $a \neq \pm\sqrt{6}$ unica, $a = \pm\sqrt{6}$ no tiene

18. $\begin{array}{c} x + y + z = 2 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + (a^2 - 1)\, z = a + 1 \end{array}$ Resp no tiene solucion para $a = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$ y unica para $a \neq \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$

19. $\begin{array}{c} ax+y+z+u=1 \\ x+ay+z+u=a \\ x+y+az+u=a^2 \\ x+y+z+au=a^3 \end{array}$ respuesta $a\neq -3,1$ unica, $a=-3$ no tiene, $a=1$ infinitas

20. $\begin{array}{c} ax+ay+(a+1)\,z=a \\ ax+ay+(a-1)\,z=a \\ (a+1)\,x+ay+(2a+3)\,z=1 \end{array}$ respuesta $a\neq 0$ unica, $a=0$ infinitas

21. $\begin{array}{cccc} x & +2y & +az & =1 \\ 2x & +ay & +8z & =-3 \end{array}$ respuesta $a=4$ no tiene, $a\neq 4$ infinitas

22. $\begin{array}{c} x+y-z=2 \\ x-2y+z=3 \\ x+y+(a^2-5)\,z=a \end{array}$ respuesta $a\neq -2,2$ unica, $a=-2$ no tiene, $a=2$ infinitas

23. $\begin{array}{c} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{array}$ respuesta $a\neq -2$, unica, $a\neq 1$ no tiene, $a=1$ infinitas

24. $\begin{array}{c} ax+y+z=4a \\ x-y+z=a+1 \\ x+(a+1)\,y+az=a+5 \end{array}$ respuesta $a=\frac{-3}{2}no$ tiene

25. $\begin{array}{c} 3x-(a+2)\,y+2z=a+1 \\ 2x-5y+3z=1 \\ x+3y-(a+1)\,z=0 \end{array}$ respuesta $a\neq 3,0$ unica, ,a=0 infinitas,a=3 no tiene

26. $\begin{array}{c} x+y+az=2 \\ 3x+4y+2z=a \\ 2x+3y-z=1 \end{array}$ respuesta $a\neq 3$ unica, $a=3$ infinitas

27. $\begin{array}{c} x+ay+z=1 \\ ax+y+(a-1)\,z=a \\ x+y+z=a+1 \end{array}$ respuesta $a\neq 1$ unica, $a=1$ no tiene

28. $\begin{array}{c} ax-y+2z=a+1 \\ x+ay-z=-1 \\ 3x+y+z=a \end{array}$ respuesta $a\neq 3,2$ unica, $a=3$ no tiene $a=2$ infinitas

29. $\begin{array}{c} x+y-z=3 \\ x-y+3z=4 \\ x+y+(a^2-10)\,z=a \end{array}$ respuesta $a\neq \pm 3$ unica, $a=-3$ no tiene $a=3$ infinitas

30. $\begin{array}{l} x+(a^2-8)\,y=3 \\ x+(a^2-8)\,y=a \end{array}$ respuesta $a\neq 3$ no tiene, $a=3$ infinitas

31. Que condiciones deben satisfacer a,by c para que el sistema:

$$\begin{array}{r} x+3y+2z=a \\ -x+2y-3z=b \\ 5y-z=c \end{array}$$

Sea consistente.

32. Las ecuaciones para hallar las intensidades de corriente $i_{1,}i_{2,}i_3$, en un determinado circuito de tres mallas son:

$$\begin{array}{c} 3i_1-2i_2+4i_3=2 \\ i_1+3i_2-6i_3=8 \\ 2i_1-i_2-2i_3=0 \end{array}$$, resp: $\left[i_1=2, i_2=3, i_3=\frac{1}{2}\right]$

Hallar $i_{1,}i_{2,}i_3$.

33. Resolver, utilizando el algoritmo de Gauss los sistemas, en caso de que tengan infinitas soluciones, dar la solución general.

(a) $\begin{array}{c} x+y-3z=-1 \\ 2x+y-2z=1 \\ x+y+z=3 \\ x+2y-3z=1 \end{array}$, Resp No tiene solucion

(b) $\begin{array}{c} 2x-y+3z=3 \\ 3x+y-5z=0 \\ 4x-y+z=3 \\ x+3y-13z=-6 \end{array}$ resp $[x=1, y=2, z=1]$

(c) $\begin{array}{c} x+3y+2z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ 3x-5y+4z=0 \\ x+17y+4z=0 \end{array}$ resp: $\left[x=-\frac{11}{7}z, y=-\frac{1}{7}z\right]$

(d) $\begin{array}{c} x+y+z+u+v=7 \\ 3x+2y+z+u-3v=-2 \\ y+2z+2u+6v=23 \\ 5x+4y+3z+3u-v=12 \end{array}$, resp $\left[u=\frac{19}{4}-\frac{5}{4}y-z-\frac{3}{2}x, v=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{9}{4}\right]$

(e) $\begin{array}{c} x+2y+2z=2 \\ 3x-2y-z=5 \\ 2x-5y+3z=-4 \\ x+4y+6z=0 \end{array}$, resp $[x=2, y=1, z=-1]$

34. Determinar las condiciones de a, b, c, tales que los sistemas tengan solución única:

   (a) $\begin{array}{l} x-2y+4z=a \\ 2x+3y-z=b \\ 3x+y+2z=c \end{array}$ Resp a,b,c números reales

   (b) $\begin{array}{l} bx+ay=c \\ cx+az=b \\ cy+bz=a \end{array}$ Resp $abc \neq 0$

   (c) $\begin{array}{c} x+y+2z=a \\ x+z=b \\ 2x+y+3z=c \end{array}$, si $c=a+b$ infinitas soluciones y si $c \neq a+b$ no tiene

   (d) $\begin{array}{c} x+y+z=a \\ 2x+2z=b \\ 3y+3z=c \end{array}$, resp: $\left[x=a-\frac{1}{3}c, y=a-\frac{1}{2}b, z=\frac{1}{2}b-a+\frac{1}{3}c\right]$

35. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales para los ángulos x, y, z, considerando el intervalo $(0, 2\pi)$

   $\begin{array}{c} 2\sin x-\cos y+3\tan z=3 \\ 4\sin x+2\cos y-2\tan z=2 \\ 6\sin x-3\cos y+\tan z=9 \end{array}$ Resp $\left(\frac{\pi}{2}, \pi, 0\right)$

36. Demuestre que en un sistema homogéneo de ecuaciones lineales:

   (a) La suma de dos soluciones es también solución.

   (b) El producto de un escalar por una solución también es solución.

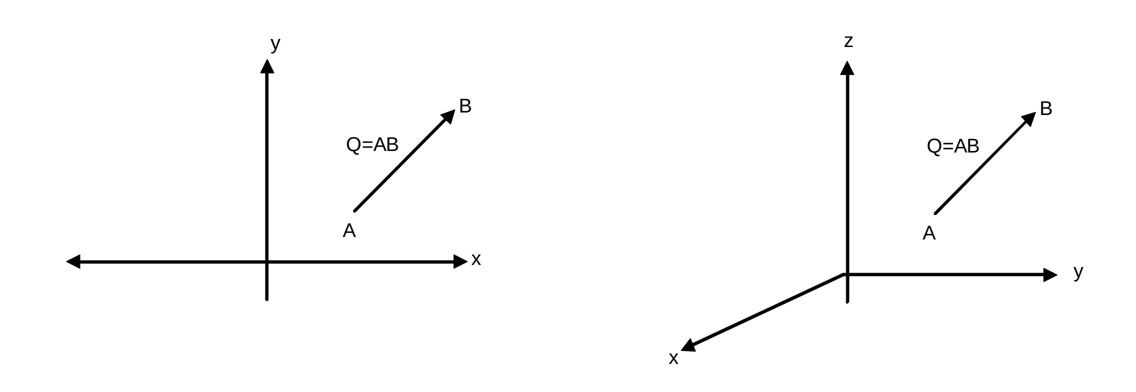
Capítulo 4

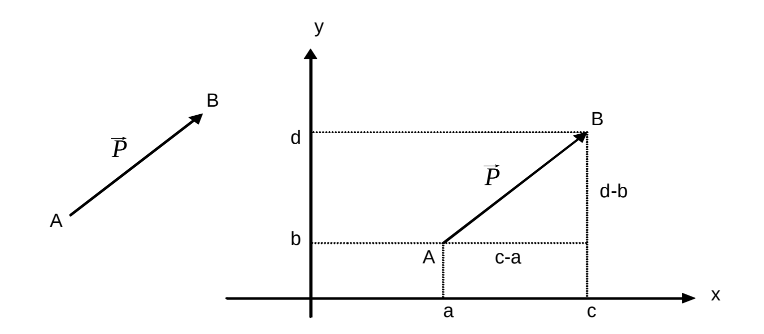
VECTORES

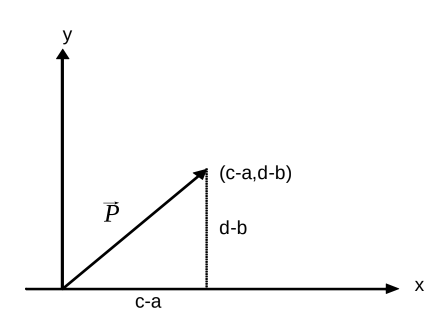
Dados dos puntos A y B en el plano o en el espacio, el segmento de recta orientado, que tiene punto inicial en A y punto final en B, notado por $\overrightarrow{AB}$, se entenderá por el vector que va de A hacia B o simplemente el vector $Q = \overrightarrow{AB}$ y geometricamente se puede representar por una flecha que sale del punto A (punto inicial) y llega al punto B (punto final) figura 1

Figura 1

En resumen, un vector es un segmento de recta dirigido, el cual esta caracterizado por tres elementos, la magnitud, la direccion y el sentido. La magnitud, la determina la longitud del segmento de recta que representa al vector, es decir, la distancia que hay entre los puntos final e inicial, la direccion la determina la recta sobre la cual esta reposando el vector o cualquier recta paralela a ella, es decir, dos vectores tienen la misma direccion si reposan sobre la misma recta o sobre rectas paralelas. El sentido esta determinado por la orientacion que tome el segmento de recta que representa al vector.







Los vectores los representaremos por letras mayusculas, con una flecha encima o simplemente con letras mayusculas cuando no haya confucion (figura 4.2), esto es el vector $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{AB}$ o por ejemplo el vector $\overrightarrow{P}$ o el vector $\overrightarrow{Q}$

figura2

figura 2

Si el vector tiene punto inicial en el origen y punto final en B entonces el vector se nota por $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{0B}$ o simplemente por $\overrightarrow{P}$, o por B . Con esta observacion un punto en el plano (espacio) P, se interpreta como el vector que tiene punto inicial en el origen y punto final en P, es decir, a un vector cualquiera en el plano o en el espacio se le puede hacer corresponder un único punto en el plano o en el espacio y viceversa, es decir, que dado un punto en el plano o en el espacio este se puede considerar como un vector que tiene punto inicial en el origen.

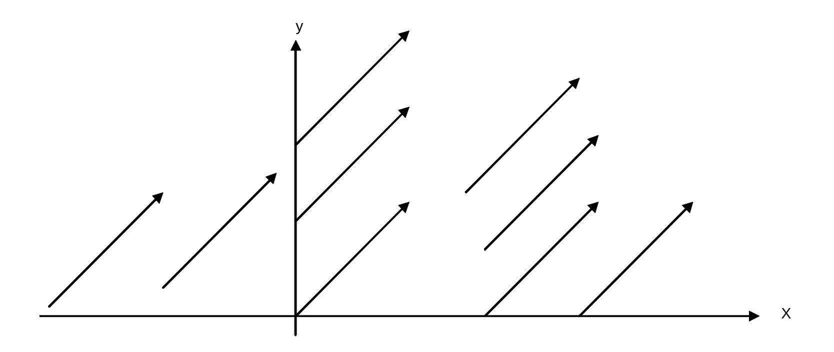
Recordemos que dada una recta en el espacio, existe una corresondencia biunivoca entre los puntos sobre la recta y el conjunto de los numeros Reales y que existe una correspondencia biunivoca entre los elementos de R^2 y los puntos sobre el plano y existe una correspondencia biunivoca entre los puntos del espacio y el conjunto R^3

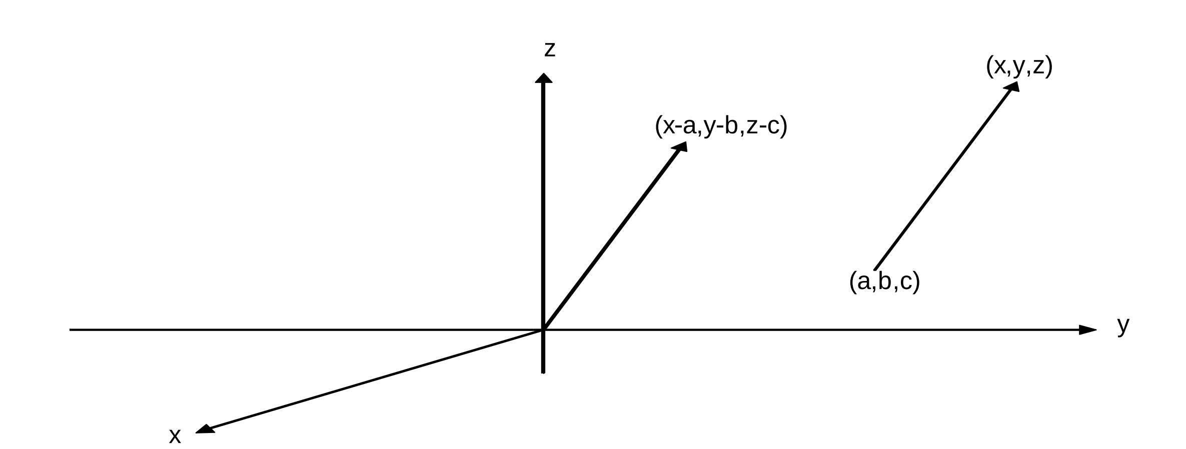
Dos vectores son equivalentes (iguales) si tienen la misma magnitud, direccion y sentido sin importar la posicion figura 3

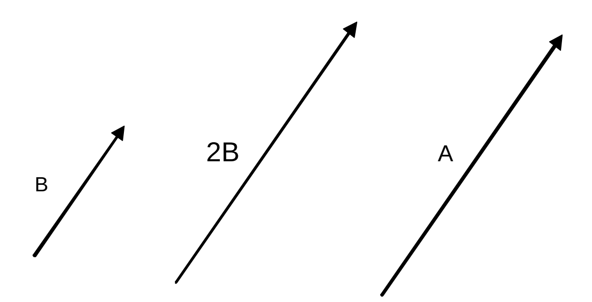
figura 3

En general dado un vector cualquiera en el plano o en el espacio con punto inicial (a, b, c) y con punto final (x, y, z) se puede encontrar un vector equivalente con punto inicial en el origen y punto final en $(x - a, y - b, z - c)$ figura 4

figura 4


y
x


z
(x,y,z)
(x-a,y-b,z-c)
(a,b,c)
y
x



4.0.1 Vectores Paralelos

Dos vectores A y B son paralelos si y solo si $A = \lambda B$ con $\lambda \in R$

figura 5
figura 5

Ejemplo 4.1 *Los vectores* $(2,4), (1,2)$ *son paralelos, pues* $(2,4) = 2(1,2)$

Ejemplo 4.2 *Los vectores* $(6,4), (3,2)$ *son paralelos, pues* $(6,4) = 2(3,2)$

Ejemplo 4.3 *Los vectores* $(12,4,8), (3,1,2)$ *son paralelos, pues* $(12,4,8) = 4(3,1,2)$

Ejemplo 4.4 *Hallar el valor de m para que los vectores* $(1,m,1)\,(-2,4,m)$ *sean paralelos*

En efecto $(1,m,1) = \lambda(-2,4,m)$ sisi $1 = -2\lambda$, $m = 4\lambda$, $1 = m\lambda$ y de aqui se concluye que $\lambda = -\frac{1}{2}$ y $m = -2$

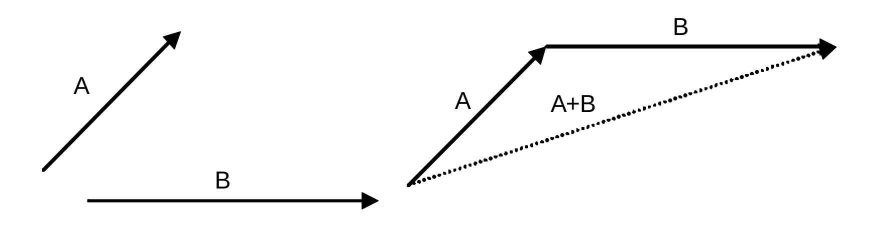
4.1 Operaciones.

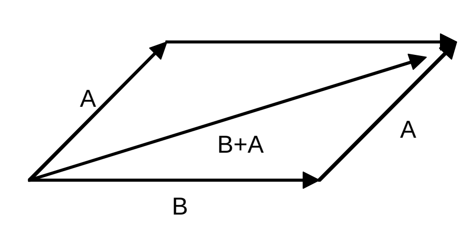
4.2 Suma de vectores.

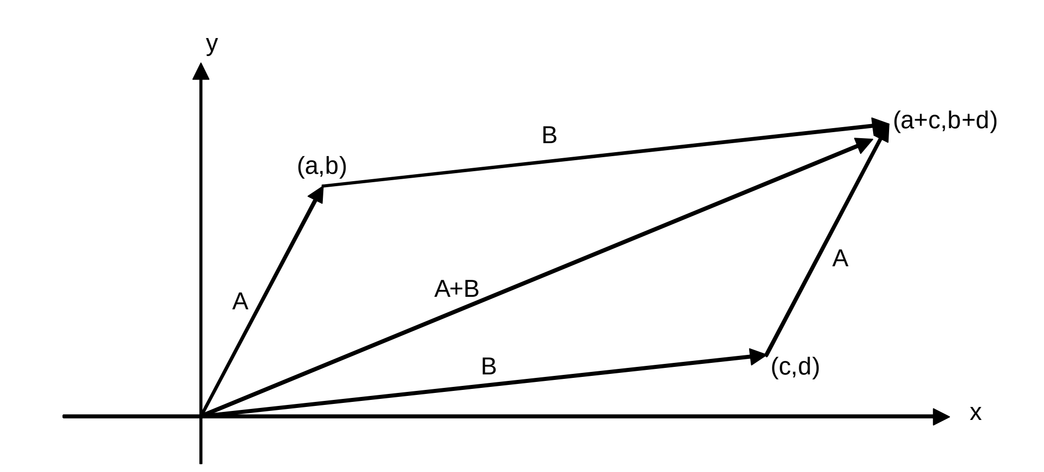
Sean A y B dos vectores, para hacer la suma $A \dot{+} B$, se toma el vector B y se hace coicidir, el punto inicial de B con el punto inicial de A, (con vectores paralelos), se forma el paralelogramo y el vector resultantes es la suma de A con B o el punto inicial B se hace coicidir con el punto final de A y la suma es el vector con punto inicial en el punto inicial de A y con punto final el punto final de B figura 6

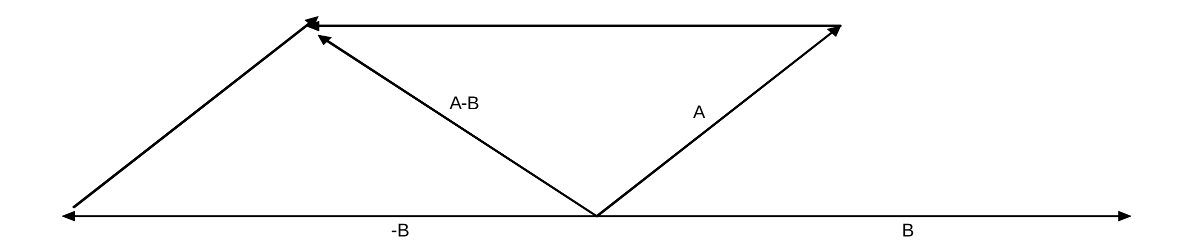
figura 6

analiticamente $A \dot{+} B = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ figura 7


A
B
A
B
A+B


A
B+A
A
B


y
B
(a+c,b+d)
(a,b)
A
A+B
A
B
(c,d)
x



Ejemplo 4.5 *Si se tiene el vector*
Si $A = (3,4)$ *y el vector* $B = (4,2)$ *entonces* $A \dotplus B = (3,4) + (4,2) = (7,6)$

Ejemplo 4.6 *Si* $A = (2,4,6)$ *y el vector* $B = (4,2,4)$ *entonces* $A \dotplus B = (2,4,6) + (4,2,4) = (6,6,10)$

4.3 Resta de vectores.

Si se tiene el vector A entonces el vector $-A$ es el vector A pero con sentido contrario
La resta $A - B$ se define por $A - B = A + (-B)$ figura 7

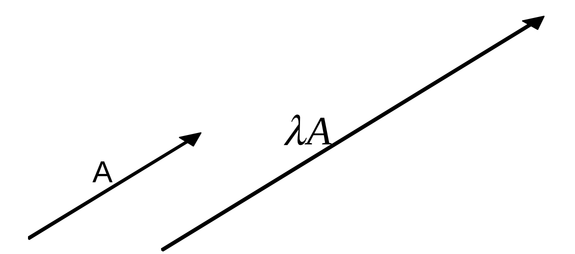
figura 7

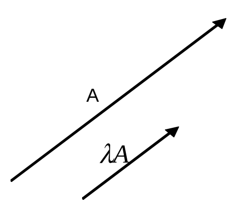
Ejemplo 4.7 $(4,6) - (2,3) = (4,6) + (-1)(2,3) = (4,6) + (-2,-3) = (4-2, 6-3) = (2,3)$

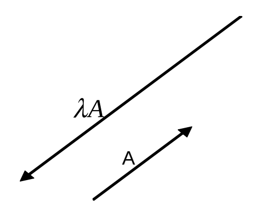
Ejemplo 4.8 $(8,6) - (10,2) = (-2,4)$

4.4 Multiplicación de un vector por un número real.

Sea A un vector y $\lambda \in \mathbb{R}$
1. Si $\lambda > 1$;entonces el vector λA : Tiene la misma dirección, orientación y diferente magnitud (mayor) que A.
Si se suma un vector A consigo mismo 3 veces, se obtiene otro vector que se denota por 3A, que tiene la misma direccion y sentido, pero su magnitud es 3 veces A
2. Si $0 < \lambda < 1$;entonces el vector λA : Tiene la misma dirección, orientación y diferente magnitud que A.
figura 9
3. Si $\lambda < -1$;entonces el vector λA : Cambia de sentido y aumenta la magnitud, pero no de dirección.


A
λA


A
λA


λA
A

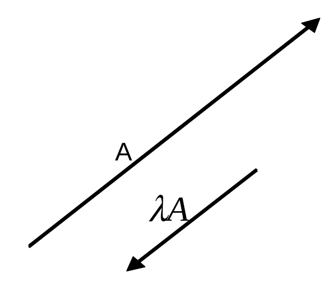


figura 10

4. Si $-1 < \lambda < 0$;entonces el vector λA : Cambia de sentido y disminuye la magnitud, pero no de dirección.
figura 11

4.5 Propiedades de los vectores

Sean A,B,C vectores y α y β numeros reales

1. $A + B = B + A$. En efecto,
   $A + B = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b) = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$. En efecto, $(A + B) + C = ((a, b) + (c, d)) + (m, n) = ((a + c, b + d)) + (m, n) = (a + c + m, b + d + n) = (a + (c + m), b + (d + n)) = (a, b) + ((c + m) + (d + n)) = (a, b) + ((c, d) + (m, n)) = A + (B + C)$
3. $A + 0 = 0 + A = A$
4. $A + (-A) = 0$
5. $(\alpha B)\, A = \alpha\,(BA)$
6. $\alpha\,(A + B) = \alpha A + \alpha B$ En efecto,$\alpha\,(A + B) = \alpha\,((a, b) + (c, d)) = \alpha\,(a + c, b + d) = (\alpha a + \alpha c, \alpha b + \alpha d) = (\alpha a, \alpha b) + (\alpha c, \alpha d) = \alpha A + \alpha B$
7. $1.A = A$
8. $(\alpha + \beta)\, A = A\alpha + \beta A$

Ejemplo 4.9 *Si* $A = (3, 4)$ *y* $B = (2, 3)$ *entonces* $A+B = (3, 4)+(2, 3) = (3+2, 4+3) = (2 + 3, 3 + 4) = (2, 3) + (3, 4) = B + A$

4.6 Norma de un vector

La norma del vector A se nota por $||A||$ y se define por $||A|| = ||(a,b)|| = \sqrt{a^2+b^2} =$ Longitud del vector y si $||A|| = ||(a,b,c)|| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} =$ Longitud del vector. Si

$$A = \overrightarrow{PQ}, \text{ con } P = (a,b,c)\,,\; Q = (m,n,q) \text{ entonces}$$
$$||A|| = ||Q-P|| = ||(m-a, n-b, q-c)|| = \sqrt{(m-a)^2+(n-b)^2+(q-c)^2} =$$
$$\text{Longitud del vector } \overrightarrow{PQ}$$

4.6.1 Propiedades de la norma de un vector.

1. $||A|| \geqslant 0$
2. Si λ es un escalar y A es un vector entonces $||\lambda A|| = |\lambda|\,||A||\,.$
3. $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$ Desigualdad triangular.

Demostracion propiedad numero 2

$$||\lambda A|| = ||\lambda\,(a,b)|| = ||(\lambda a, \lambda b)|| = \sqrt{\lambda^2 a^2 + \lambda^2 b^2} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{a^2+b^2} = |\lambda|\,.\,||(a,b)|| =$$
$$|\lambda|\,.\,||A||$$

4.7 Producto interior o Producto escalar o Producto punto.

$$R^n \times R^n \quad \rightarrow \quad R$$
$$(a_1,a_2,a_3,...,a_n)\,.\,(b_1,b_2,b_3,...,b_n) = x.y = (a_1,a_2,a_3,...,a_n)\,.\,(b_1,b_2,b_3,...,b_n) = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$$

Ejemplo 4.10 $(1,1,1)\cdot(2,1,0) = 1\times 2 + 1\times 1 + 1\times 0 = 3$

4.7.1 Propiedades del producto interior.

1. $A \cdot A = ||A||^2$

   $A \cdot A = (a,b)\cdot(a,b) = a^2 + b^2 = ||A||^2$
2. $A \cdot B = B \cdot A$

3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

4. $\|B - A\|^2 = \|B\|^2 + \|A\|^2 - 2\|A\|\|B\|\cos\theta$ ley de los cosenos

5. $A \cdot B = \|A\|\|B\|\cos\theta.$

$\|B - A\|^2 = (B - A) \cdot (B - A) = B \cdot B - B \cdot A - A \cdot B + A \cdot A = \|B\|^2 - 2A \cdot B + \|A\|^2$ y como $\|B - A\|^2 = \|B\|^2 + \|A\|^2 - 2\|A\|\|B\|\cos\theta$ igualando estos resultados se tiene que $A \cdot B = \|A\|\|B\|\cos\theta$

6. A y B son perpendiculares sisi $A \cdot B = 0$

Ejemplo 4.11 $A = (0, 2); B = (3, 0)$ *son perpendiculares pues* $A \cdot B = (0, 2) \cdot (3, 0) = 0 + 0 = 0$

Ejemplo 4.12 *Hallar un vector perpendicular al vector* $(2, 3)$ *:*

$$(2, 3) \cdot (2, b) = 0 \Rightarrow 4 + 3b = 0 \Rightarrow b = -\tfrac{4}{3} \text{ entonces } \quad (2, b) = \left(2, -\tfrac{4}{3}\right)$$

Ejemplo 4.13 *Hallar un vector perpendicular al vector* $(3, 1, 2)$.

$(3, 1, 2) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow 3a + b + 2c = 0$ Tiene infinitas soluciones, darle a , b y c cualquier valor y obtenga a y asi obtiene el vector (a, b, c)

7. La desigualdad de Cauchy $|A \cdot B| \leq \|A\|\,\|B\|$

Se sabe que$\|(xA + yB)\|^2 = (xA + yB) \cdot (xA + yB) \geq 0$ entonces $x^2 A \cdot A + xyA \cdot B + yxB \cdot A + y^2 B \cdot B = x^2\|A\|^2 + 2xyA \cdot B + y^2\|B\|^2 \geq 0$ como esta desigualdad vale para toda x,y entonces tomemos $x = B \cdot B$ y $y = -A \cdot B$ y asi

$$x^2\|A\|^2 + 2xyA \cdot B + y^2\|B\|^2 = (B \cdot B)^2\|A\|^2 - 2B \cdot B \times (A \cdot B)^2 + (-A \cdot B)^2\|B\|^2$$

$$= \|B\|^4\|A\|^2 - 2\|B\|^2(A \cdot B)^2 + (A \cdot B)^2\|B\|^2$$

luego

$$\|B\|^2\|A\|^2 - 2(A \cdot B)^2 + (A \cdot B)^2 = \|B\|^2\|A\|^2 - (A \cdot B)^2 \geq 0$$

sisi

$$(A \cdot B)^2 \leq \|A\|^2\|B\|^2$$

luego sacando raíz cuadrada se tiene

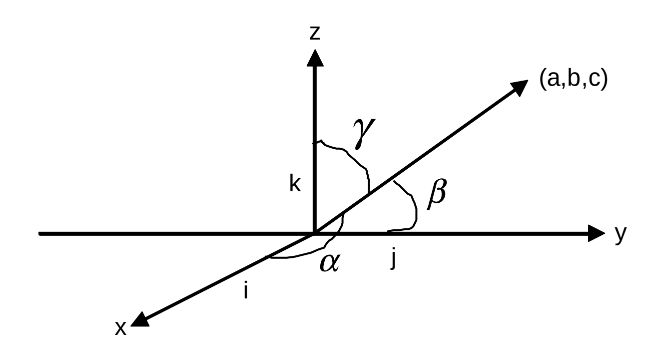
$$|A \cdot B| \leq \|A\|\|B\|$$

8. Desigualdad triangular $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

como

$\|A + B\|^2 = (A+B) \cdot (A + B) = A \cdot (A + B) + B \cdot (A + B) = A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B = \|A\|^2 + 2A \cdot B + \|B\|^2 \leq \|A\|^2 + 2|A \cdot B| + \|B\|^2 \leq \|A\|^2 + 2\|A\|\|B\| + \|B\|^2 = (\|A\| + \|B\|)^2$ por lo tanto

$\|A + B\|^2 \leq (\|A\| + \|B\|)^2$ asi que $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ Tomando raiz cuadrada



4.7.2 Angulos directores y cosenos directores.

Los vectores $(1,0,0) = i = e_1$, $(0,1,0) = j = e_2$ y $(0,0,1) = k = e_3$ se llaman vectores canonicos y el angulo α, β, γ que forma el vector $A = (a,b,c)$ con el eje positivo de las x ó y ó z se llaman angulos directores y sus cosenos se llaman cosenos directores . Para hallar los angulos directores y sus cosenos se procede asi:

Para el angulo director α se toma el vector A y el vector $i = (1,0,0)$ y la propiedad $A \cdot B = ||A||\,||B|| \cos\theta$ asi

$$A \cdot i = ||A||\,||i|| \cos\alpha \Leftrightarrow (a,b,c)\,.\,(1,0,0) = a = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\alpha$$

de donde

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \qquad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$

Para el angulo director β se toma el vector A y el vector $j = (0,1,0)$ y la propiedad $A \cdot B = ||A||\,||B|| \cos\theta$ asi

$$A \cdot j = ||A||\,||j|| \cos\beta \Leftrightarrow (a,b,c)\,.\,(0,1,0) = b = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\beta$$

de donde

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \quad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$

Para el angulo director γ

$$A \cdot k = ||A||\,||k||\cos\gamma \Leftrightarrow (a,b,c)\,.\,(0,0,1) = c = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\alpha$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$

y se puede verificar que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

4.7.3 Vectores unitarios

Un vector unitario es aquel que tiene norma igual a uno.

Los vectores canónicos son ejemplos de vectores unitarios, pero en general

Si $A \neq 0$ es un vector que no es unitario, entonces el vector $\frac{A}{||A||}$ es un vector unitario, ya que:

$$\left|\left|\frac{A}{||A||}\right|\right| = \frac{||A||}{||A||} = 1$$

Conclusión: Para obtener un vector unitario con la misma dirección y sentido de un vector dado A, se divide el vector A por su norma, por ejemplo el vector $A = (3,4,5)$ no es unitario pero el vector $B = \frac{(3,4,5)}{||(3,4,5)||} = \frac{(3,4,5)}{\sqrt{9+16+25}} = \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{5}{5\sqrt{2}}\right)$ es un vector unitario con la misma dirección y sentido del vector A.

Los vectores $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (\cos\theta, \sin\theta), (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ son vectores unitarios.

Cualquier vector (a,b,c) se puede escribir como $ai + bj + ck$, es decir,

$(a,b,c) = ai + bj + ck$,ya que

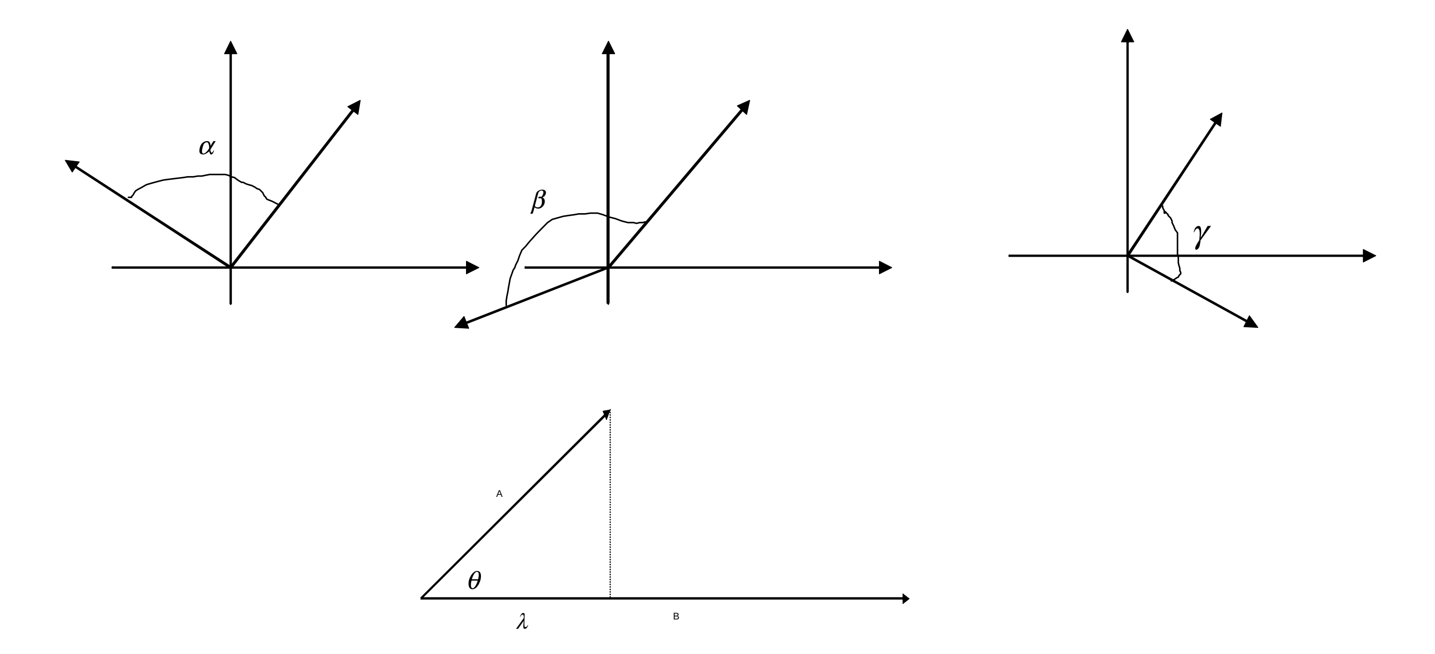
$$(a,b,c) = (a,0,0) + (0,b,0) + (0,0,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = ai + bj + ck$$

Ejemplo 4.14 $3i + 5j + 3k = (3,5,3)\,,\ \ -6i + 8j - 2k = (-6,8,-2)$

4.7.4 Angulo entre vectores

El angulo φ entre los vectores A y B es aquel comprendido entre ellos y esta entre 0 y π, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Ejemplo 4.15 *Hallar el angulo entre los vectores* A=$(1,0)$ *y* B=$(0,1)$. *En efecto* $A \cdot B = ||A||\,||B||\cos\theta$ *sisi* $0 = ||(1,0)||\,||(0,1)||\cos\theta = \cos\theta$ *por tanto* $\cos\theta = 0$ *y asi* $\theta = \frac{\pi}{2}$



4.7.5 Proyecciòn de un vector sobre otro.(A *sobre* B)

figura 15

$$ProyA_B = \lambda \frac{B}{||B||} = \frac{B}{||B||} ||A|| \cos\theta = \frac{B\, ||B||\, ||A|| \cos\theta}{||B||\, ||B||} = \frac{A \cdot B}{||B||^2} B$$

donde

$$\cos\theta = \frac{\lambda}{||A||} \Leftrightarrow \lambda = ||A|| \cos\theta$$

Ejemplo 4.16 *Si* $A = (3,3)$ *y* $B = (5,0)$ *entonces*

$$ProyA_B = \frac{A \cdot B}{||B||^2} B = \frac{(3,3) \cdot (5,0)}{25} (5,0) = \frac{15}{5 \times 5} (5,0) = 3\,(1,0) = (3,0)$$

Ejemplo 4.17 *Si* $A = (0,2)$ *y* $B = (5,5)$ *entonces*

$$ProyA_B = \frac{A \cdot B}{||B||^2} B = \frac{(0,2) \cdot (5,5)}{50} (5,5) = (1,1)$$

Ejemplo 4.18 *Si* $A=(-2,2)$ *y* $B=(3,1)$ *entonces*

$$ProyA_B=\frac{A\cdot B}{||B||^2}B=\frac{(-2,2)\cdot(3,1)}{10}(3,1)=\left(\frac{-6}{5},\frac{-2}{5}\right)$$

Ejemplo 4.19 *Si* $A=(2,3)$ *y* $B=(1,1)$ *entonces*

$$ProyA_B=\frac{A\cdot B}{||B||^2}B=\frac{(2,3)\cdot(1,1)}{2}(1,1)=\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$$

4.8 Producto Cruz

Si $A=(a_1,a_2,a_3)$ y $B=(b_1,b_2,b_3)$ son dos vectores en R^3, su producto cruz notado por $A\times B$ se define por: $A\times B=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$,es decir, se puede considerar el producto cruz como una función de la forma:

$$\times: R^3\times R^3\to R^3$$
$$(A,B)\to A\times B=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$$

Como

$$\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)=A\times B.$$

En general se usa este recurso nemotécnico para recordar la definición de $A\times B$, y escribimos simplemente que:

$$A\times B=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

Ejemplo 4.20 *Si* $A=2i-8j+3k$ *y* $B=4j+3k$

$$A\times B=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & -8 & 3\\ 0 & 4 & 3\end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} -8 & 3\\ 4 & 3\end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 0 & 3\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 2 & -8\\ 0 & 4\end{vmatrix}=-36i-6j+8k$$

Ejemplo 4.21 $i\times j=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} j & k\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-(-k)=k$

En forma análoga,

$j\times k=i,\ k\times i=j,\ j\times i=-k,\ \ k\times j=-i,\ \ i\times k=-j,\ i\times i=j\times j=k\times k=0.$

4.8.1 Propiedades del producto cruz

1. $A \times 0 = 0$

$$A \times 0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2. $A \times A = 0$

$$A \times A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

3. $A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -B \times A$

4. $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

$$A \times (B + C) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$= A \times B + A \times C$$

5. $c(A \times B) = (cA) \times B = A \times (cB)$

$$c(A \times B) = c \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ca_1 & ca_2 & ca_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (cA) \times B$$

6. $A \cdot (A \times B) = 0$

$$A \cdot (A \times B) = (a_1, a_2, a_3)(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) =$$
$$= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1$$
$$= 0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad \text{Llamado producto mixto}$$

7. $B \cdot (A \times B) = 0$ Se prueba en forma análoga a la propiedad 6.

   De las propiedades 6 y 7 se concluye que $A \times B$ es un vector ortogonal a A y a B.

8. $\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2$

   Esta propiedad es conocida como Identidad de Lagrange

$\|A \times B\|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$

$\|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$

y se hacen las operaciones algebraicas de los miembros de la derecha y se demuestra que son iguales.

9. $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$

   $i \times (i \times j) = i \times k = -j$

   $(i \times i) \times j = 0 \times j = 0,$ Luego, en general,

   $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$

10. Sean A y B dos vectores no nulos en R^3, $A \times B = 0$, si y sólo si A y B son paralelos

11. $\|A \times B\| = \|A\| \|B\| \sin\theta$

    De la identidad de Lagrange se tiene que:

    $$\begin{aligned} \|A \times B\|^2 &= \|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2 \\ &= \|A\|^2 \|B\|^2 - (\|A\| \|B\| \cos\theta)^2 \\ &= \|A\|^2 \|B\|^2 - \|A\|^2 \|B\|^2 \cos^2\theta \\ &= \|A\|^2 \|B\|^2 (1 - \cos^2\theta) \\ &= \|A\|^2 \|B\|^2 \sin^2\theta \end{aligned}$$

    Entonces sacando raíz cuadrada a $\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 \sin^2\theta$ se tiene:

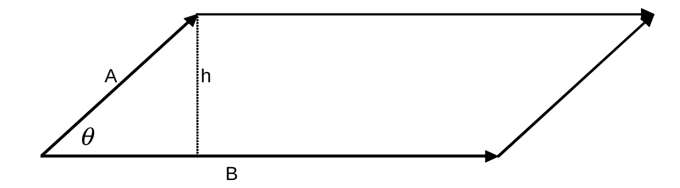
    $\|A \times B\| = \|A\| \|B\| |\sin\theta| = \|A\| \|B\| \sin\theta$ y corresponde al area del paralelogramo de lados A,B

4.9 Producto mixto

Los productos escalar y vectorial pueden combinarse para formar el producto mixto $A \cdot B \times C$, y su valor es un número, ya que es el producto escalar de dos vectores y se puede calcular por medio de determinantes así:

Si $A = (a_1, a_2, a_3); B = (b_1, b_2, b_3); C = (c_1, c_2, c_3)$, entonces producto mixto se define por

$$A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$



4.9.1 Propiedades del producto mixto

$$(A \times B) \cdot C = (B \times C) \cdot A = (C \times A) \cdot B$$

$$A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = B \cdot (C \times A) = (C \times A) \cdot B$$

Ejemplo 4.22 *Si* $A = (2, 3, -1); B = (3, -7, 5); C = (1, -5, 2),$ *entonces*

$$A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -7 & 5 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 2(-14 + 25) - 3(6 - 5) - 1(-15 + 7) = 27$$

4.10 Área de un paralelogramo determinado por los vectores A y B

figura 16 $A = \|B\| \, h$

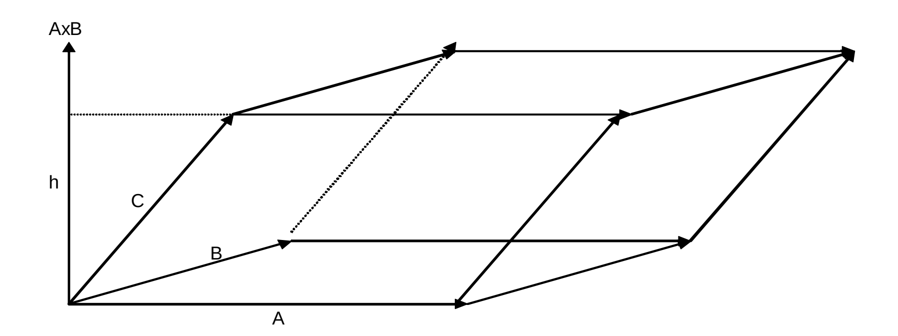
$$\sin\theta = \frac{h}{\|A\|} \rightarrow h = \|A\| \sin\theta$$
$$Area = \|B\| \, \|A\| \sin\theta = \|A \times B\|$$
Luego, el área está dada por $\|A \times B\|$

Ejemplo 4.23 *El área del paralelogramo determinado por los vectores 2i y 3j es:*
$Area = \|2i \times 3j\| = \|6i \times j\| = \|6k\| = 6$

Ejemplo 4.24 *Hallar el área del paralelogramo determinado por:*
$A = (-3, -2, 2);\ B = (-2, 2, 3)$

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-10, 5, -10)$$

Entonces $\acute{A}rea = \|A \times B\| = \sqrt{100 + 25 + 100} = \sqrt{225} = 15$



Ejemplo 4.25 *Hallar el área del triángulo determinado por:*

$P_1 = (2,2,0); P_2 = (-1,0,2); P_3 = (0,4,3)$ *figura*

En efecto, el área del triángulo es $\frac{1}{2}\|A \times B\|$

$\overrightarrow{P_1P_2} = A = (-3,-2,2)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = B = (-2,2,3)$

y $\|A \times B\| = 15$ *y así el área del triángulo es* $\dfrac{15}{2}$

Ejemplo 4.26 *Hallar el área del paralelogramo con dos lados adyacentes formados por:*

$A = (1,2,3); B = (4,5,6)$

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-3,6,-3)$$

Entonces Área $= \|A \times B\| = \|(-3,6,-3)\| = \sqrt{9+36+9} = \sqrt{54}$

4.11 Volúmenes

4.11.1 Volumen de un paralelepípedo determinado por tres vectores A,B,C.

Los tres vectores no deben estar en el mismo plano.

El volumen viene dado por:

$V = (\text{Área base})(altura)$

El área de la base es $\|A \times B\|$ y la altura es la norma de la proyección del vector C sobre $A \times B$, es decir,

$$h = \left\| proy \begin{matrix} C \\ A \times B \end{matrix} \right\| = \left\| \frac{C \cdot (A \times B)}{\|A \times B\|^2} A \times B \right\| = |C \cdot A \times B| \frac{1}{\|A \times B\|} \text{ entonces}$$

$$\text{luego } V = |C \cdot A \times B| \frac{1}{\|A \times B\|} \|A \times B\| = |C.(A \times B)|$$

Ejemplo 4.27 *Hallar el volumen del paralelepípedo determinado por:*
$A = (1, 2, 3); B = (4, 5, 6); C = (7, 8, 0)$
El volumen es $|C \cdot (A \times B)|$

$$C \cdot (A \times B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7(-3) - 8(-6) = 27$$

Luego el volumen es $|C \cdot (A \times B)| = 27$

Ejemplo 4.28 *Hallar el volumen del paralelepípedo determinado por:*
$A = (2, 3, -1); B = (1, 0, 2); C = (0, 2, -1)$

$$C \cdot (A \times B) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -10 + 3 = 7$$

Luego el volumen del paralelepípedo es 7.

4.12 Regla de Cramer

Considerando el sistema,

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

que se puede escribir como $xA + yB + zC = D$, si se hace producto punto a ambos lados de esta ecuación con $B \times C$ obtenemos

$xA \cdot B \times C + yB \cdot B \times C + zC \cdot B \times C = D \cdot B \times C$ y despejando x obtenemos

$$x = \frac{D \cdot B \times C}{A \cdot B \times C} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

si se hace producto punto a ambos lados de esta ecuación $xA + yB + zC = D$ con $C \times A$ obtenemos

$xA \cdot C \times A + yB \cdot C \times A + zC \cdot C \times A = D \cdot C \times A$ y despejando y obtenemos

$$y = \frac{D \cdot C \times A}{B \cdot C \times A} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & c_1 & a_1 \\ d_2 & c_2 & a_2 \\ d_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

si se hace producto punto a ambos lados de esta ecuación $xA + yB + zC = D$ con $A \times B$ obtenemos
$xA \cdot A \times B + yB \cdot A \times B + zC \cdot A \times B = D \cdot A \times B$ y despejando z obtenemos

$$z = \frac{D \cdot A \times B}{C \cdot A \times B} = \frac{D \cdot A \times B}{A \cdot B \times C} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

4.13 EJERCICIOS PROPUESTOS CAPITULO 4

1. Si $A = (1, 2, 3, 1)$ $\quad B = (1, -1, 2, 4), C = (1, 1, 2, 2)$ Hallar
   (a) $A \cdot B$ respuesta 9
   (b) $B \cdot C$ respuesta 12
   (c) $A \cdot (B + C)$ respuesta 20
   (d) $(A - B) \cdot C$ respuesta -1

2. En cada una de las expresiones siguientes introducir un paréntesis para que la expresión tenga sentido si $A, B, C \in \mathbb{R}^3$
   (a) $A \cdot BC$ Respuesta $(A \cdot B)C$
   (b) $A \cdot B + C$ Respuesta $A \cdot (B + C)$
   (c) $A + B \cdot C$ Respuesta $(A + B) \cdot C$
   (d) $AB \cdot C$ Respuesta $A(B \cdot C)$
   (e) $\dfrac{A}{B \cdot C}$ Respuesta $\dfrac{A}{(B \cdot C)}$

3. Si $A = (2, 1, -1)$; $B = (1, 1, 2)$ Hallar
   (a) Un vector no nulo $C \in \mathbb{R}^3$ tal que $A \cdot C = B \cdot C$ Respuesta por ejemplo $(3, 0, 1)$ y en general $(3z, y, z)$
   (b) Un vector no nulo $C \in \mathbb{R}^3$ tal que $A \cdot C = B \cdot C = 0$ Respuesta por ejemplo $(3, -5, 1)$ y en general $(3z, -5z, z)$

4. $A = (1, 3, 2)$;$B = (3, -1, 2)$ hallar escalares x, y tal que $C = xA + yB$ sea un vector no nulo y que $C \cdot B = 0$ $\quad \left(-\frac{7}{2}, 1\right)$, $\left(x, \dfrac{-2x}{7}\right)$

5. Sea $A = (1, 1, 1, 1)$; $\quad B = (0, 1, 2, 1)$, hallar dos vectores C y D de $\mathbb{R}^4$ que satisfaga las condiciones siguientes:
   (a) $A = C + D$
   (b) B ortogonal a D

(c) C paralelo a B Respuesta $C = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right), D = \left(1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

6. Hallar un vector B de $\mathbb{R}^2$ tal que $A \cdot B = 0$ y $\|B\| = \|A\|$ si $A = (1,3)$ Respuesta $(\pm 3, \pm 1)$

7. Si $A = (1,2,-1,2)$; $B = (2,1,0,-1)$, hallar un vector paralelo a $A - 2B$ y de longitud 7 Respuesta $\left(\frac{-21}{\sqrt{26}}, 0, \frac{-7}{\sqrt{26}}, \frac{28}{\sqrt{26}}\right)$

8. Hallar todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ que tiene la misma longitud de A y son ortogonales a A si $A = (1,3)$ Resp $(-3,1), (3,-1)$

9. Si $A = (1,2,3)$; $B = (0,1,1)$, hallar un vector ortogonal a A y a B de longitud 4.Respuesta $\left(\frac{-4}{\sqrt{3}}, \frac{-4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$

10. Si $A = (1,1,1)$; $B = (1,-1,2)$, hallar vectores $P, Q \in \mathbb{R}^3$ tales que

    (a) $A = P + Q$

    (b) P paralelo a B

    (c) Q ortogonal a B Respuesta $P = \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right), Q = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$

11. Dados los vectores $A = (2,-1,1)$; $B = (1,2,-1)$; $C = (1,1,-2)$, hallar vectores D de la forma $xB + yC$ ortogonales a A y de longitud 1. (Rta./ $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$)

12. Si $A, B \in \mathbb{R}^4$, demostrar que $\|A+B\|^2 - \|A-B\|^2 = 4A \cdot B$

13. Si $A = (1,2,3)$; $B = (-1,4,3)$ hallar ProyA_B y ProyB_A Respuesta$\left(\frac{-8}{13}, \frac{32}{13}, \frac{24}{13}\right)$, $\left(\frac{8}{7}, \frac{16}{7}, \frac{24}{7}\right)$

14. Hallar los cosenos directores del vector $(1,1,1)$ Respuesta$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

15. Hallar los cosenos de los ángulos del triángulo con vértices $(2,-1,1)$, $(1,-3,-5)$, $(3,-4,-4)$ (Rta./($\sqrt{\frac{35}{41}}, \sqrt{\frac{6}{41}}, 0$)

16. Si $A, B, C \in \mathbb{R}^3$; $\|A\| = \|C\| = 5$; $\|B\| = 1$; $\|A - B + C\| = \|A + B + C\|$

    Si el ángulo que forman A y B es $\frac{\pi}{8}$, hallar el ángulo que forman B y C (Rta./$\frac{7\pi}{8}$)

17. Hallar dos vectores unitarios con punto inicial en $(2,4)$ y que sean normales a $y = x^2$ allí. (Rta./$\pm\frac{(4,-1)}{\sqrt{17}}$)

18. Si $A = 2i + j - k$, hallar dos vectores ortogonales y unitarios a A respuesta las soluciones de $2a + b - c = 0$ y dividir por la norma por ejemplo $\left(\frac{1,-1,1}{\sqrt{3}}\right)$

19. Muestre que los vectores $A = (1, 1, -1)$, $B = (2, 3, -2)$, $C = (4, 5, -4)$ están en el mismo plano Resp hacer $(A \cdot B \times C = 0)$

20. Hallar el área del triángulo de vértices $P = (1, 3, -2)$, $Q = (2, 4, 5)$, $R = (-3, -2, 2)$; y el volumen del paralelepípedo de aristas $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$; (Rta.$\frac{\sqrt{2546}}{2}$, 55)

21. Mostrar que $(1, -1, 4), (3, -2, 4), (-4, 2, 6), (-2, 1, 6)$ son los vértices de un paralelogramo resp si

22. Si $A = i + 2k$; $B = 2i + j - k$; $C = i + 2j + 3k$, Hallar

    (a) $A \times C; \|A \times C\|$ Resp $(-4, -1, 2)$, $\sqrt{21}$
    (b) $(A + B) \times (A - C)$ Resp $(1, 3, -6)$
    (c) $A \times (B \times C)$ Resp $(14, 7, -7)$
    (d) $\|(A + B) \times (A - C)\|$ Resp $(1, 3, -6)$, $\sqrt{46}$

23. Demostrar que $\|A \times B\| = \|A\| \|B\|$ sí y sólo sí A y B son ortogonales

24. Dados dos vectores no paralelos $A, B \in \mathbb{R}^3$ con $A \cdot B = 2$; $\|A\| = 1$, $\|B\| = 4$; $C = 2A \times B - 3B$ Hallar $A \cdot (B + C)$; $\|C\|$ y el coseno del ángulo que forman B Y C. Resp $C = \sqrt{192}, 150, -4,$

25. Si $A \cdot (B \times C) = 3$ hallar

    (a) $A \cdot (C \times B)$ Respuesta -3
    (b) $(B \times C) \cdot A$ Respuesta 3
    (c) $C \cdot (A \times B)$ Respuesta3
    (d) $B \cdot (A \times C)$ Respuesta -3
    (e) $(A \times C) \cdot B$ Respuesta -3
    (f) $B \cdot (C \times A)$ Respuesta 3

26. $\|A + B\|^2 + \|A - B\|^2 = 2\|A\|^2 + 2\|B\|^2$

27. Si θ es el ángulo que forman los vectores $A = (1, 1, ..., 1)$; $B = (1, 2, ..., n)$ hallar el valor límite de θ cuando $n \to \infty$ (Rta./$\pi/6$)

28. Mostrar que$(-2,1,6),(2,4,5),(-1,-2,1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo

29. Determine las componentes del vector que tiene su punto inicial en P_1 y su punto final en $P_{2.}$

    (a) $P_1(3,5), P_2(2,8)$ Resp $(-1,3)$
    (b) $P_1(6,5,8), P_2(8,-7,-3)$ Resp $(2,-12,-11)$

30. Determine un vector que tenga su punto inicial en $P(2,-1,4)$ y que tenga la misma dirección que $V=(7,6,-3)$ Resp $P=(2,-1,4), Q=(9,5,1)$

31. Determine un vector con direccion contraria a la de $V=(-2,4,-1)$ y con punto final en $Q(2,0,-7)$ .Resp $P=(0,4,-8), Q=(2,0,-7)$

32. Sean $U=(1,2,3), V=(1,-3,1)$ y $W=(3,2,-1)$.

    Determine las componentes de:

    (a) $U-W$ Resp$(-2,0,4)$
    (b) $7V+3W$ Resp$(16,-15,4)$
    (c) $3(U-7V)$ Resp$(-18,-57,-12)$
    (d) $2V-(U+W)$ Resp$(-2,10,0)$

33. Sean $U=(1,2,3), V=(1,-3,1)$ y $W=(3,2,-1)$.

    Determine las componentes del vector X que satisface $2U-V+X=7X+W$ Resp $\left(\frac{-1}{3},\frac{5}{6},1\right)$

34. Sean $U=(1,2,3), V=(1,-3,1)$ y $W=(3,2,-1)$.

    Encuentre escalares a, b y c, tales que: $aU+bV+cW=(6,14,-2)$

35. Demuestre que no existen escalares a,b,c tales que:

    $a(1,2,-3)+b(5,7,1)+c(6,9,-2)=(4,5,0)$ Resp no existen

36. Encuentre todos los escalares a, b y c tales que:

    $a(2,7,8)+b(1,-1,3)+c(3,6,11)=(0,0,0)$

37. Sean $U=(1,-3,2),\qquad V=(1,1,0)\qquad W=(2,2,-4)$.

    Determine:

(a) $\|U+V\|$ Resp $\sqrt{12}$

(b) $\|U\|+\|V\|$ Resp $\sqrt{14}+\sqrt{2}$

(c) $\|-2U\|+2\|U\|$ Resp $\sqrt{56}+2\sqrt{14}$

(d) $\frac{1}{\|W\|}W$ Resp $\left(\frac{2,2,-4}{\sqrt{24}}\right)$

(e) $\left\|\frac{1}{\|W\|}W\right\|$ Resp 1

38. Determine todos los escalares k tales que:

$\|kV\|=3$ donde $V=(1,2,4)$ Resp $\pm\frac{3}{\sqrt{21}}$

39. Encontrar un vector de norma 1 que tenga la misma dirección que $V=(1,1,1)$ Resp $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

40. Calcule $U.V$ para:

(a) $U=(1,2)$ $V=(6,8)$ Resp 22

(b) $U=(1,-3,7)$ $V=(8,-2,-2)$ Resp 0

41. Para el ejercicio anterior encontrar el angulo θ entre U y V Resp $10.30°$, $\frac{\pi}{2}$

42. Determine si el ángulo formado por U y V es agudo, obtuso, o si los vectores son ortogonales:

(a) $U=(7,3,5)$ $V=(-8,4,2)$ Resp obtuso

(b) $U=(6,3,1)$ $V=(4,0,-6)$ Resp agudo

(c) $U=(1,1,1)$ $V=(-1,0,0)$ Resp obtuso

(d) $U=(4,1,6)$ $V=(-3,0,2)$ Resp ortogonal

43. Encuentre la proyeccion ortogonal de U sobre V si:

(a) $U=(2,1)$ $V=(-3,2)$ Resp $\left(\frac{12}{13},\frac{-8}{13}\right)$

(b) $U=(-7,1,3)$ $V=(5,0,1)$ Resp $\left(\frac{-160}{\sqrt{26}},0,\frac{-32}{\sqrt{26}}\right)$

44. Determine dos vectores de norma 1 que sean orotgonales a $(3,2)$ Resp por ejemplo $\left(\frac{-2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

45. Sea $U = (1, 2), V = (4, -2)$ y $W = (6, 0)$ determine:

    (a) $U.(7V + W)$ Resp 6
    (b) $\|(U.V)W\|$ Resp 0
    (c) $\|U\|(V.U)$ Resp 0

46. Utilice vectores para encontrar los ángulos interiores del triangulo con vertices en $(-1, 0), (-2, 1)$ y en $(1, 4)$ Resp $90°, 18°, 72°$

47. Determine el angulo formado por la diagonal de un cubo y una de las caras. Resp $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

48. Sean $U = (2, -1, 3)$, $V = (0, 1, 7)$ y $W = (1, 4, 5)$ calcule:

    (a) $V \times W$ Resp $(-23, 7, -1)$
    (b) $U \times (V \times W)$ Resp $(-20, -67, -9)$
    (c) $(U \times V) \times W$

49. Determine un vector que sea ortogonal a U y V:

    (a) $U = (-7, 3, 1)$ $V = (2, 0, 4)$ Resp $(12, 30, -6)$
    (b) $U = (-1, -1, -1)$ $V = (2, 0, 2)$ Resp $(-2, 0, 2)$

50. Calcular el área del triangulo que tiene vértices en P,Q y R

    (a) $P = (1, 5, -2)$ $Q = (0, 0, 0)$ $R = (3, 5, 1)$ Resp $\frac{\sqrt{374}}{2}$
    (b) $P = (2, 0, -3)$ $Q = (1, 4, 5)$ $R = (7, 2, 9)$ Resp$\frac{\|(32,52,-22)\|}{2} = 9\sqrt{13}$

51. Sean $U = (-1, 3, 2)$ y $W = (1, 1, -1)$ encuentre todos los vectores que satisfacen $U \times X = W$

52. Calcular los cosenos directores del vector $V = (12, -15, -16)$ Resp $\left(\frac{12}{25}, \frac{-3}{5}, \frac{-16}{25}\right)$

53. Determinar para que valor de a los vectores $U = ai - 3j + 2k$ y $V = i + 2j - ak$ son perpendiculares Resp $a = -6$

54. Hallar el vector X, si se sabe que es perpendicular a los vectores $U = (2, 3, -1)$ y $V = (1, -2, 3)$ y satisface la condicion:

    $X.(2i - j + k) = -6$ Resp $(-3, 3, 3)$

55. Se dan tres vectores:

    $U = 2i - j + 3k \qquad V = i + 2j - ak \qquad W = 3i + 2j - 4k$

    hallar el vector X, que satisface las condiciones:

    $X.U = -5, \qquad X.V = 11, \qquad X.W = 20$ Resp $7a \neq 32$

56. Sea $U = 2i - j + 3k$ y V un vector de longitud 5 y dirección y sentido coincidentes con los del vector $i + 2j + 3k$.Hallar el producto escalar de U por V.Resp $\frac{45}{\sqrt{14}}$

57. Encontrar un vector unitario perpendicular a los vectores $U = i + j + k \qquad V = 2i - j + k$, ¿cuantas soluciones tiene el problema? Resp $\left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right)$

58. Sean A y B tales que $\|A\| = 4$ y $\|B\| = 2$ y el angulos entre ellos 60^0 Hallar $\|A + B\|, \|A - B\|$ Resp$\sqrt{28}, \sqrt{12}$

59. Si A y B son perpendiculares y $\|A\| = 6, \|B\| = 10$ hallar $\|A + B\|$ resp $\sqrt{136}$

60. Hallar el angulo que forma A y B si $\|A\| = 3$, $\|B\| = 15$ y $\|A + B\| = 7$. resp $\theta = 60$

61. Si A y B tienen la misma longitud entonces $A + B$ y $A - B$ son perpendiculares

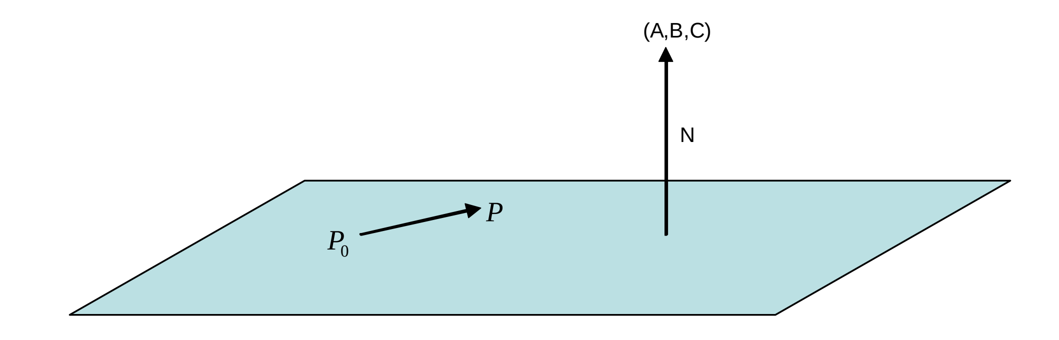
Capítulo 5

PLANOS

5.1 Planos en el espacio

Un plano se puede considerar intuitivamente como una hoja de papel, haciendo que la hoja es ilimitada. Estamos interesados en hallar la ecuación del plano y para ello consideramos un punto del plano fijo $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y un vector normal $N = (A, B, C)$ al plano, entonces el punto $P = (x, y, z)$ pertenece al plano sí y sólo sí el vector $\overrightarrow{P_0P} \cdot N = 0$, es decir, $(P - P_0) \cdot N = 0$, es decir, $((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot (A, B, C) = 0$, es decir, $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, es decir, $Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$, es decir, $Ax + By + Cz = D$ si $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$, y así la ecuación cartesiana del plano que pasa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene a $N = (A, B, C)$ como vector normal tiene por ecuación $Ax + By + Cz = D$. A la ecuanción $(P - P_0) \cdot N = 0$, se llama ecuación vectorial del plano.figura 18

1. $z = 0$ ecuación de un plano que tiene a $N = (0, 0, 1)$ como vector normal y un punto del plano es por ejemplo $(1, 3, 0)$ ya que $z = 0$ se puede escribir como $0x + 0y + z = 0$



por tanto x y y toman cualquier valor

2. $x + y = 1$;ecuación de un plano que tiene a $N = (1, 1, 0)$ como vector normal y un punto del plano es por ejemplo $(1, 0, 4)$, ya que $x + y = 1$, se puede escribir como $x + y + 0z = 1$ y z toma cualquier valor

3. $x + y + z = 4$;ecuación de un plano que tiene a $N = (1, 1, 1)$ como vector normal y un punto del plano es por ejemplo $(1, 1, 2)$ ya que por ejemplo si $x = 1$ y $y = 1$ entonces $z = 4$

4. $x = 4$;ecuación de un plano que tiene a $N = (1, 0, 0)$ como vector normal y un punto del plano es por ejemplo $(4, 3, 5)$, y y z toman cualquier valor

Ejemplo 5.1 *La ecuación del plano que pasa por* $(1, 0, 0)$ *y tiene como vector normal a* $(1, 1, 1) = (A, B, C)$ *es*
$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
$1(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0$
$x + y + z = 1$

Ejemplo 5.2 *Hallar la ecuación del plano que pasa por* $(1, 2, 3)$ *y es paralelo al plano* $3x - y + 4z = 2$.

Como el plano buscado es paralelo al plano $3x - y + 4z = 2$, *su vector normal es* $(3, -1, 4) = (A, B, C)$ *y como* $(1, 2, 3) = (x_0, y_0, z_0)$, *pertenece al plano entonces:* $3(x - 1) - 1(y - 2) + 4(z - 3) = 0$ *es la ecuación del plano, es decir,* $3x - y + 4z = 3 - 2 + 12 = 13$.

Ejemplo 5.3 *Hallar la ecuación del plano que pasa por* $(x_0, y_0, z_0) = (3, 2, 1)$, *y es perpendicular al vector* $(4, 6, 7)$.

Como el vector normal al plano es $N = (4, 6, 7)$ y $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (3, 2, 1)$,
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$
$$4(x - 3) + 6(y - 2) + 7(z - 1) = 0, \text{ luego, } 4x + 6y + 7z = 31$$

Ejemplo 5.4 *Hallar la ecuación del plano que pasa por:* $A = (1, 2, -1); B = (2, 3, 1); C = (3, -1, 2)$.

Como los puntos A, B, C pertenecen al plano, entonces se forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 1, 2)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, -3, 3)$$
por tanto $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (9, 1, -5)$ es normal al plano y como A es un punto del plano, entonces:

$9(x-1)+1(y-2)-5(z+1)=0$ por tanto $\quad 9x+y-5z=9+2+5=16$

Ejemplo 5.5 *También la ecuación de plano se puede hallar reemplazando los tres puntos en la ecuación* $Ax+By+Cz-D=0$ *y solucionar el sistema, es decir,*

$A+2B-C-D=0$

$2A+3B+C-D=0$

$3A-B+2C-D=0$

cuya solución es

$A=\frac{9}{16}D; B=\frac{D}{16}; C=-\frac{5}{16}D$ *y así*

$\frac{9}{16}Dx+\frac{D}{16}y-\frac{5}{16}Dz-D=0$

$D(\frac{9}{16}x+\frac{1}{16}y-\frac{5}{16}z-1)=0$, *luego,*

$9x+y-5z=16$

Ejemplo 5.6 *Hallar la ecuación del plano que pasa por* $(1,2,2)$ *y es perpendicular a* $x-y+z=1$. *El vector normal al plano* $x-y+z=1$ *es* $(1,-1,1)$ *y si hacemos el producto cruz de* $(1,2,2)\times(1,-1,1)=N$ *vector normal del plano pedido, es decir,*

$$(1,2,2)\times(1,-1,1)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=(4,1,-3)$$

Luego la ecuación del plano es:

$4(x-1)+1(y+1)-3(z-1)=0$ *sisi* $4x+y-3z=4-1-3=0$ *sisi* $4x+y-3z=0$

Ejemplo 5.7 *Hallar la ecuación del plano, que pasa por el punto* $(4,0,-2)$, *y es perpendicular a cada plano* $x-y+z=0$ *y* $2x+y-4z=5$. *El vector normal es el producto cruz de los vectores normales de los dos planos* $N_1=(1,-1,1); N_2=(2,1,-4)$, *es decir,*

$$N=N_1\times N_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}=(3,6,3),\ \textit{luego la ecuación}$$

$3(x-4)+6(y-0)+3(z+2)=0$ *es decir* $3x+6y+3z=6$

Una segunda forma de solución sería: como $N=(A,B,C)$ *es perpendicular a* $x-y+z=0$ *y a* $2x+y-4z=5$, *entonces:*

$(A,B,C)\cdot(1,-1,1)=0 \Longrightarrow \quad A-B+C=0 \quad \Longrightarrow \quad A=B-C$

$(A,B,C)\cdot(2,1,-4)=0 \Longrightarrow \quad 2A+B-4C=0$

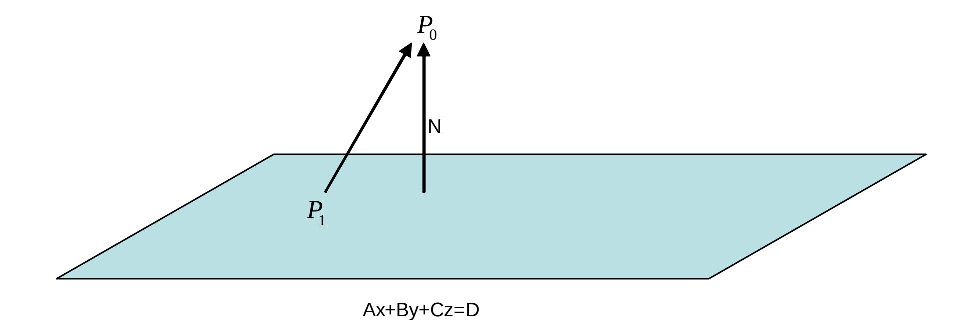
Ahora, reemplazando $A=B-C$ *en* $2A+B-4C=0$ *obtenemos*

$2(B-C)+B-4C=0 \quad \Longrightarrow \quad 2B-2C+B-4C=0 \quad \Longrightarrow \quad 3B-6C=0$

$B=2C$ *luego* $A=2C-C=C$

Entonces:

$N=(C,2C,C)=C(1,2,1)=3(1,2,1)=(3,6,3)$



Luego la ecuación del plano es $3(x-4)+6(y-0)+3(z+2)=0$

5.2 Distancia de un punto a un plano

5.2.1 Distancia del punto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ al plano $Ax+By+Cz=D$

Sea $P_1=(x_1,y_1,z_1)$, un punto del plano, luego la distancia del punto P_0 al plano $Ax+By+Cz=D$ es la longitud de la proyección del vector $\overrightarrow{P_1P_0}$ sobre N, es decir:

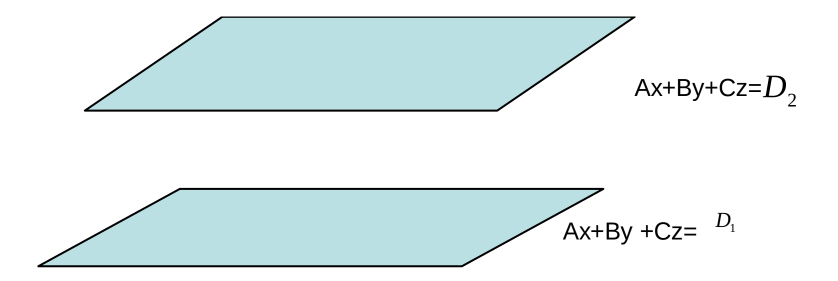
$$d=\left\|\Pr oy\overrightarrow{P_1P_0}_N\right\|=\left\|\frac{\overrightarrow{P_1P_0}\cdot N}{\|N\|^2}N\right\|=\frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot N\right|}{\|N\|}=$$

$$d=\frac{|(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)\cdot(A,B,C)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Luego

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



Ejemplo 5.8 *Hallar la distancia del punto* $(1,2,4)$ *al plano* $x+2y-3z=5$; $(x_0,y_0,z_0)=(1,2,4)$;

$$(A,B,C)=(1,2,-3).$$
$$d=\frac{|1(1)+2(2)+(-3)4-5|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}=\frac{|1+4-17|}{\sqrt{14}}=\frac{12}{\sqrt{14}}$$

5.3 Distancia entre dos planos paralelos

Sean $Ax+By+Cz=D_1; Ax+By+Cz=D_2$, dos planos paralelos, entonces para hallar la distancia entre ellos, escogemos un punto en cualquiera de alguno de ellos y hallamos la distancia del punto al plano así:

Sea $z=0$; $y=0$; y $Ax=D_1 \Longrightarrow x=\frac{D_1}{A}$, es decir, tomemos $P_0(x_0,y_0,z_0)=(\frac{D_1}{A},0,0)$ y la distancia de este punto al plano $Ax+By+Cz=D_2$, viene dada por:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\left|A\frac{D_1}{A}+B(0)+C(0)-D_2\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Ejemplo 5.9 *La distancia entre* $x+y+z=4$ *y* $x+y+z=10$ *es:*

$$\frac{|10-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|4-10|}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}$$

Ejemplo 5.10 *Hallar la distancia entre los planos* $x+y+z=1$ *y* $3x+3y+3z=10$ *es:*

para aplicar la formula hay que escribir los planos $x+y+z=1$ *y* $3x+3y+3z=10$ *en la forma* $x+y+z=1$ *y* $x+y+z=\frac{10}{3}$ *luego la distancia es*

$$\frac{\left|\frac{10}{3}-1\right|}{\sqrt{3}}=\frac{\frac{7}{3}}{\sqrt{3}}$$

5.4 Planos paralelos y perpendiculares

Dos planos son paralelos sí y sólo sí sus vectores normales son paralelos.
Dos planos son perpendiculares sí y sólo sí sus vectores normales son perpendiculares.
El ángulo entre dos planos, es el formado entre sus vectores normles.

Ejemplo 5.11 *Los planos* $x+y+z=4$ *y* $2x+2y+2z=10$ *son paralelos*

Ejemplo 5.12 *Los planos* $2x-3y+2z=4$ *y* $6x-9y+6z=10$ *son paralelos*

Ejemplo 5.13 *Los planos* $z=1$ *y* $z=2$ *son paralelos*

Ejemplo 5.14 *Los planos* $x=1$ *y* $x=2$ *son paralelos*

Ejemplo 5.15 *Los planos* $z-y=1$ *y* $3z-3y=15$ *son paralelos*

Ejemplo 5.16 *Un plano corta al eje x en el punto* $(3,0,0)$ *y es paralelo al plano yz, hallar su ecuacion*

Como el plano es paralelo al plano yz entonces un vector normal es $(1,0,0)$ y como pasa por el punto $(3,0,0)$ entonces
$(X-P)\cdot N=((x,y,z)-(3,0,0))\cdot(1,0,0)=(x-3,y,z)\cdot(1,0,0)=x-3=0$,luego la ecuacion del plano es $x=3$.

Ejemplo 5.17 *Hallar a y b para que los planos* $2x+ay+z-1=0$, $bx-6y+2z=0$ *sean paralelos.*

Para que los planos sean paralelos los vectores normales deben ser paralelos, luego su producto cruz es cero,es
decir,$(2,a,1)\times(b,-6,2)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & a & 1 \\ b & -6 & 2 \end{vmatrix}=(2a+6,b-4,-12-ab)=(0,0,0)$ por tanto
$2a+6=0, b-4=0, -12-ab=0$, luego $b=4$ y $a=-3$

Ejemplo 5.18 *Hallar a para que los planos* $2x+4y+az-3=0$, $x+2y-z=4$ *sean perpendiculares.*

Para que los planos sean perpendiculares los vectores normales deben ser perpendiculares, es decir,$(2,4,a)\cdot(1,2,-1)=2+8-a=0$, por tanto $a=10$

Ejemplo 5.19 *Hallar la distancia entre los planos* $2x+y-2z=1$, $4x+2y-4z=-4$

En efecto, las ecuaciones de los planos son $2x+y-2z=1, 2x+y-2z=-2$ (segunda ecuacion hay que dividirla por 2) y tomamos un punto en cualquiera de uno de los planos por ejemplo $(2,2,4)$ un punto del plano $2x+y-2z=-2$ y asi la distancia entre dos planos paralelos se calcula por

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1-(-2)|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{3}{3}=1$$

Ejemplo 5.20 *Hallar el ángulo entre los planos* $x-3y+4z=1, 2x+2y+z=3$

En efecto $(1,-3,4)\cdot(2,2,1)=\|(1,-3,4)\|\,\|(2,2,1)\|\cos\theta$ entonces
$2-6+4=0=\sqrt{26}\sqrt{9}\cos\theta$ entones
$\cos\theta=0$, entonces $\theta=90°$

Ejemplo 5.21 *Hallar la ecuacion del plano que pasa por* $(1,1,1)$ *y es paralelo a los vectores* $(1,0,1),(2,1,-1)$

Como el plano es paralelo a los vectores $(1,0,1),(2,1,-1)$ entonces un vector normal es

$$(1,0,1)\times(2,1,-1)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=[-1,3,1]$$ entonces la ecuacion del plano es

$$-1(x-1)+3(y-1)+1(z-1)=0=3y-x+z-3=0$$

Ejemplo 5.22 *Hallar la ecuacion del plano paralelo a* $5x-y+4=0$ *y que pasa por* $(1,0,-3)$

Como el plano es paralelo a $5x-y+4=0$ entonces u vector normal es $(5,-1,0)$ y como pasa por $(1,0,-3)$ entones se ecuacion es $5(x-1)-1(y-0)+0(z+3)=0, es$ decir,

$$5x-y-5=0$$

Ejemplo 5.23 *Hallar la ecuacion del plano que es perpendicular a* $x-2y=5, 2x+z=7$ *y pasa por* $(1,2,1)$

Un vector normal del plano es $(1,-2,0)\times(2,0,1)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-2,-1,4)$ por tanto se ecuacion es $-2(x-1)-1(y-2)+4(z-1)=0=4z-y-2x=0$

Ejemplo 5.24 *Hallar la ecuacion del plano cuyo punto más próximo al origen es* $(1, 3, 2) = P$

En efecto, el vector 0P es un vector normal al plano luego su ecuacion es $1\,(x-1) + 3\,(y-3) + 2\,(z-2) = 0 = x + 3y + 2z - 14 = 0$

5.5 EJERCICIOS PROPUESTOS CAPITULO 5

1. Hallar la ecuación del plano que pasa por $(1,3,2)$, $(3,-2,2)$, $(2,1,3)$

   Rta:$5x+2y-z=9$

2. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(4,0,-2)$ y es perpendicular a cada plano $x-y+z=0; 2x+y-4z=5$ Rta./$x+2y+z-2=0$

3. Hallar la distancia del punto $(1,4,6)$ al plano $2x-y+2z+10=0$ (Rta./$\frac{20}{3}$)

4. Hallar la ecuación del plano que pasa por $(1,1,4)$ y tiene como normal a $(1,9,8)$ resp $x+9y+8z=42$

5. Hallar la ecuación del plano que pasa por $(0,0,0)$ y tiene como vector normal a (1,2,3) resp $x+2y+3z=0$

6. Determinar si los planos son paralelos:

   (a) $4x-y+2z=5$ y $7x-3y+4z=8$ Resp no

   (b) $x-4y-3z-2=0$ y $3x-12y-9z=7$ Resp si

   (c) $2y=8x-4z+5$ y $x=\dfrac{z}{2}+\dfrac{y}{3}$ Resp no

7. Determinar si los planos son perpendiculares

   (a) $3x-y+z=4$ y $x+2z=-1$ Resp no

   (b) $x-2y+3z=4$ y $-2x+5y+4z=-1$ Resp si

8. Encontrar la ecuación del plano xy(Resp $z=0$), xz(Resp $y=0$), $yz(Resp\ x=0)$

9. Encontrar la ecuación del plano que pasa por (x_0,y_0,z_0) y es paralelo al plano

   (a) xy resp $z=z_0$

   (b) xz resp $y=y_0$

   (c) yz res $xp=x_0$

10. Hallar la ecuación del plano que es perpendicular al plano $8x-2y+6z=1$, y pasa por los puntos $(-1,2,5)$, $(2,1,4)$. (Rta./$4x+13y-z-17=0$)

11. Hallar la ecuación del plano que pasa por $(-2,1,5)$ y es perpendicular a los planos $4x-2y+2z=-1$; $3x+3y-6z=5$ (Rta./$x+5y+3z-18=0$)

12. Hallar el ángulo entre los planos $5x-2y+5z-12=0$; $2x+y-7z+11=0$ (Rta./$2\pi/3$)

13. Hallar la ecuación del plano que pasa por $(4,0,-2)$ y es perpendicular a $x-y+z=0$; $2x+y-4z=0$. (Rta./$x+2y+z=2$)

14. Un plano pasa por $(2,0,5)$, $(0,2,-1)$ y es perpendicular al plano $x+3y-z-7=0$; hallar su ecuación. Resp $2x-y-z=-1$

15. Hallar un vector normal y unitario y dos puntos de:

    (a) $x=0$ respuesta $(1,0,0)\,,(0,y,z)$

    (b) $z=4$ resp $(0,0,1)\,,(x,y,4)$

    (c) $y=1$ resp $(0,1,0)\,,(x,1,z)$

    (d) $x-z=4$ resp $(1,0,-1)\,,(4,y,0)$

    (e) $y-x=0$ resp $(-1,1,0)\,,(y,y,z)$

    (f) $x-3y+2z=5$ Resp $(1,-3,2)\,,\,(5,0,0)\,,\,\left(0,0,\frac{5}{2}\right)$

16. Un plano pasa por $(2,6,-1)$ y es paralelo a $4x-2y+z=1$ hallar su ecuación. resp $4x-2y+z=-5$

17. Hallar la distancia entre $4y-3z-6=0$ y $8y-6z-27=0$ Resp $\frac{3}{2}$

18. Hallar la ecuacion vectorial y cartesiana del plano que pasa por el punto dado y cuyo vector normal es N:

    (a) $(2,6,1)\,,N=(1,4,2)$ resp $x+4y+2z-28=0$

    (b) $(-1,-1,2)\,,N=(-1,7,6)$ resp $x-7y-6z+6=0$

    (c) $(1,0,0)\,,N=(0,0,1)$ resp $z=0$

    (d) $(0,0,0)\,,N=(1,4,2)$ resp $x+4y+2z=0$

19. Hallar la ecuacion cartesiana del plano que pasa por los puntos:

    (a) $(-2,1,1)$ $(0,2,3)$ $(1,0,-1)$ resp $2y-z-1=0$

    (b) $(3,2,1)$ $(2,1,-1)$ $(-1,3,2)$ resp $x+9y-5z-16=0$

20. Hallar la distancia minima del punto dado al plano dado y el punto del plano mas cercano al punto dado:

    (a) $(2,4,5)$ $\quad 3x+2y-5z=-3$ resp $\frac{8}{\sqrt{38}}$

    (b) $(0,0,0)$ $\quad 2x-3z=2$ resp $\frac{2}{\sqrt{13}}$

21. Si los planos dados son paralelos, halle la distancia entre ellos:

    (a) $-x+2y-3z=5 \quad 2x-4y+6z=10$ resp $\frac{10}{\sqrt{14}}$

    (b) $3x-y+2z=1 \quad -9x+3y+6z=-3$ resp 0

Capítulo 6

RECTAS

Dado un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, y un vector no nulo $V = (a, b, c)$;

el conjunto de todos los puntos P del espacio tales que el vector $\overrightarrow{P_0P}$ sea paralelo a V, se dice que es la recta que pasa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y es paralela a $V = (a, b, c)$, es decir, $\overrightarrow{P_0P} = tV$ ó $P = P_0 + tV$, $t \in R$, y a $P = P_0 + tV$, se llama ecuación vectorial de la recta y si la escribimos en terminos de sus componentes se tiene que

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) \quad \text{ó}$$

$$(x, y, z) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc) \ \text{ entonces}$$

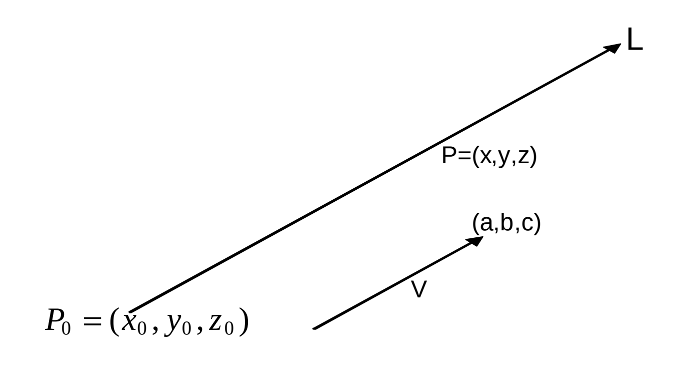
$$x = x_0 + ta$$

$$y = y_0 + tb$$

$$z = z_0 + tc$$

se llaman ecuaciones paramétricas de la recta, que pasa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene por vector dirección $V = (a, b, c)$ y si eliminamos a t obtenemos:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$



llamadas ecuaciones simétricas de la recta. La ecuación simétrica de la recta es equivalente al sistema:

$$b(x-x_0)=a(y-y_0)$$
$$c(x-x_0)=a(z-z_0)$$
$$c(y-y_0)=b(z-z_0)$$

Cada ecuación anterior es la ecuación de un plano que contiene a la recta y cualquier intersección de dos planos del sistema contiene la recta .

Ejemplo 6.1 *Hallar la ecuación de la recta que pasa por* $(2,3,4)$ *y tiene como vector dirección a* $(1,6,7)$.

$P_0=(2,3,4); V=(1,6,7)$ *luego*

1. $P=P_0+tV;$

   $(x,y,z)=(2,3,4)+(1,6,7)t$

   Ecuación vectorial

2. $(x,y,z)=(2+t,3+6t,4+7t)$

   es decir,

   $x=2+t; \quad y=3+6t; \quad z=4+7t \qquad t\in R,$

   Ecuación paramétrica

3. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{6}=\dfrac{z-4}{7}$

   Ecuación simétrica

Ejemplo 6.2 *Hallar la ecuación de la recta que pasa por* $(1,2,3)$ *y por* $(3,4,5)$.

En efecto: $V=(3,4,5)-(1,2,3)=(2,2,2)=(a,b,c)$ *y como* $P_0=(1,2,3)$, *entonces:*

1. $P=P_0+tV;$

   $(x,y,z)=(1,2,3)+(2,2,2)t$

   Ecuación vectorial

2. $x=1+2t; \quad y=2+2t; \quad z=3+2t$

   Ecuación paramétrica

3. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{2}$

   Ecuación simétrica

Ejemplo 6.3 *La recta pasa por* $(2,3,4)$ *y tiene como vector dirección a* $V = (4,5,0)$*, hallar su ecuación.*

En efecto,

1. $P = P_0 + tV;$

   $(x,y,z) = (2,3,4) + (4,5,0)t$

   Ecuación vectorial

2. $x = 2 + 4t; \quad y = 3 + 5t; \quad z = 4$

   Ecuación paramétrica

3. $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-3}{5}; z = 4$

   Ecuación simétrica

Ejemplo 6.4 *Hallar la ecuación de la recta que pasa por* $(2,4,6)$ *y tiene por vector dirección a* $V = (3,0,0)$

1. $P = P_0 + tV;$

   $(x,y,z) = (2,4,6) + (3,0,0)t$

   Ecuación vectorial

2. $x = 2 + 3t; \quad y = 4; \quad z = 6$

   Ecuación paramétrica

Ejemplo 6.5 *Hallar la recta de intersección de los planos* $3x+2y-z = 7$ *y* $x-4y+2z = 0$.

Despejamos dos variables en términos de la tercera; por ejemplo, eliminamos x *y* y *y obtenemos:*

$$\begin{matrix} 3x + 2y - z = 7 \\ x - 4y + 2z = 0. \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 3x + 2y - z = 7 \\ -3x + 12y - 6z = 0 \end{matrix}$$

Al sumar estas dos ecuaciones tenemos:

$$14y - 7z = 7 \Leftrightarrow 2y = z + 1 \Leftrightarrow y = \frac{z+1}{2} \quad y \quad \begin{matrix} 6x + 4y - 2z = 14 \\ x - 4y + 2z = 0. \end{matrix}$$

Al sumar estas dos expresiones, tenemos:

$7x = 14 \Leftrightarrow x = 2$ *Así:* $y = \dfrac{z+1}{2}$; $x = 2$, *ecuación de la recta*

Ejemplo 6.6 *Hallar la recta de intersección de los planos* $x-2y+z=0$; $2x+3y-2z=0$.

En efecto,

$$\begin{array}{r} -2x+4y-2z=0 \\ 2x+3y-2z=0 \end{array} \Leftrightarrow 7y-4z=0 \Leftrightarrow y=\frac{4}{7}z \Leftrightarrow \frac{z}{7}=\frac{y}{4}$$

$$\begin{array}{r} 3x-6y+3z=0 \\ 4x+6y-4z=0 \end{array} \Leftrightarrow 7x-z=0 \Leftrightarrow x=\frac{z}{7}$$

Entonces:

$x=\frac{z}{7}=\frac{y}{4}$ *es la ecuación de la recta. Observe que un vector direccion de la recta se puede calcular haciendo el producto cruz de los vectores normales de cada plano asi:*

$$(1,-2,1)\times(2,3,-2)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}=(1,4,7)$$

Ejemplo 6.7 *Un vector direccion de la recta* $3x-5y+7z-4=0,\ \ x-2y+z+1=0$ *es* $(3,-5,7)\times(1,-2,1)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -5 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(9,4,-1)$

Ejemplo 6.8 *Hallar el punto de intersección de las dos rectas,En efecto*

$P_1(t)=(i-6j+2k)+t(i+2j+k)=(1,-6,2)+t(1,2,1)$ *y*

$P_2(u)=(4j+k)+u(2i+j+2k)=(0,4,1)+u(2,1,2)$

Dos rectas se cortan en un punto sí y sólo sí existen escalares t,u para los cuales $P_1(t)=P_2(u)$, *luego hacemos* $P_1(t)=P_2(u)$ *así:*

$(1,-6,2)+t(1,2,1)=(0,4,1)+u(2,1,2)$ *entonces*

$(t,2t,t)-(2u,u,2u)=(0,4,1)-(1,-6,2)=(-1,10,-1)$, *es decir,*

$(t-2u,2t-u,t-2u)=(-1,10,-1)$, *luego*

$t-2u=-1$; $2t-u=10$; $t-2u=-1$, *entonces*

$t-2u=-1\Leftrightarrow t=2u-1$ *y* $2t-u=10$ *y reemplazando:*

$2(2u-1)-u=10\Leftrightarrow 4u-2-u=10\Leftrightarrow 3u=12\Leftrightarrow u=4$, *ahora,*

$t=2u-1\Leftrightarrow t=8-1=7$, *así* $P_1(7)=P_2(4)=(8,8,9)$

Luego las rectas se intersectan en el punto $(8,8,9)$

$P_1(t)=(1,-6,2)+7(1,2,1)=(8,8,9)$

$P_2(u)=(0,4,1)+4(2,1,2)=(8,8,9)$

Definición 1 *Dos rectas son paralelas sí y sólo sí sus vectores direcciones son paralelos.*

Ejemplo 6.9 *Las rectas*
$x = 3 - 2t$; $y = 4 + t$; $z = 1 - t$ *y* $x = 5 + 2t$; $y = 1 - t$; $z = 7 + t$ *son paralelas pues*
$\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-1}{-1} \Longleftrightarrow V_1 = (-2, 1, -1)$ *y*
$\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-7}{1} \Longleftrightarrow V_2 = (2, -1, 1)$
$V_1 = (-2, 1, -1) = -1(2, -1, 1) = -1V_2$
Los vectores directores son paralelos.

Definición 2 *Dos rectas son perpendiculares sí y sólo sí sus vectores directores son perpendiculares.*

Ejemplo 6.10 *Las rectas*
$\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-2}{4}$ *y* $\dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+5}{2}$ *son perpendiculares, pues*
$V_1 \cdot V_2 = (1, 3, 4) \cdot (-2, -2, 2) = -2 - 6 + 8 = 0$

Ejemplo 6.11 *Demostrar que la recta* $x - 5 = -t$; $y + 3 = 2t$; $z + 1 = -5t$ *es paralela al plano* $-3x + y + z = 9$.

En efecto, hay que demostrar que $N \cdot V = 0$ *donde* N *es el vector normal del plano y* V *el vector dirección de la recta.*
$N = (-3, 1, 1)$; $V = (-1, 2, -5)$ *y* $N \cdot V = (-3, 1, 1) \cdot (-1, 2, -5) = 3 + 2 - 5 = 0$

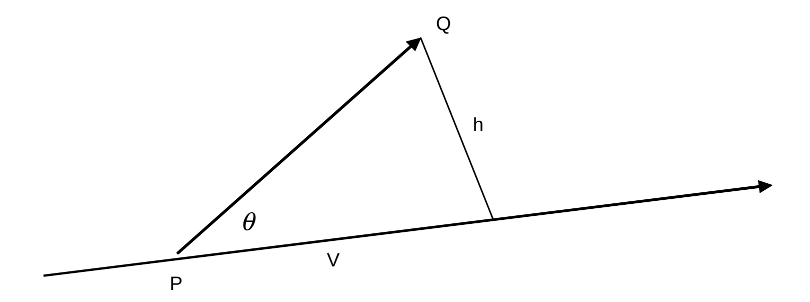
Ejemplo 6.12 *Hallar el punto de intersección de la recta* $x - 9 = -5t$; $y + 1 = -t$; $z - 3 = t$ *y el plano* $2x - 3y + 4z + 7 = 0$.

En efecto,
$x = 9 - 5t$; $y = -1 - t$; $z = 3 + t$, *luego*
$2(9 - 5t) - 3(-1 - t) + 4(3 + t) + 7 = 0$, *es decir,*
$18 - 10t + 3 + 3t + 12 + 4t + 7 = 0 \Longleftrightarrow -3t + 40 = 0 \Longleftrightarrow t = \dfrac{40}{3}$, *luego,*
$x = 9 - \dfrac{200}{3} = -\frac{173}{3}$, $y = -1 - \dfrac{40}{3} = -\frac{43}{3}$, $z = 3 + \dfrac{40}{3} = \frac{49}{3}$

6.1 Distancia de un punto a una recta

Hallar la distancia del punto Q a la recta L

$$sen\theta = \frac{h}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} \Longleftrightarrow h = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| sen\theta$$



$$Ahora \left\| \overrightarrow{PQ} \right\| \|V\| \, sen\theta = \left\| \overrightarrow{PQ} \times V \right\| entonces$$

$$= \left\| \overrightarrow{PQ} \right\| sen\theta = \frac{\left\| \overrightarrow{PQ} \times V \right\|}{\|V\|} = h$$

que es la distancia del punto Q a la recta

Otra forma de calcular distancia es calculando la Proy$\overrightarrow{PQ}_V$ y luego aplicar Pitágoras.

$$Proy\overrightarrow{PQ}_V = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot V}{\|V\|^2} V \; entonces \left\| \; Proy\overrightarrow{PQ}_V \right\| = \frac{\left\| \overrightarrow{PQ} \cdot V \; V \right\|}{\|V\| \, \|V\|} = \frac{\left\| \overrightarrow{PQ} \cdot V \; \right\|}{\|V\|}$$

luego

$$h = \sqrt{\left\| \overrightarrow{PQ} \right\|^2 - \left\| Proy\overrightarrow{PQ}_V \right\|^2} = \sqrt{\left\| \overrightarrow{PQ} \right\|^2 - \frac{\left\| \overrightarrow{PQ} \cdot V \right\|^2}{\|V\|^2}}$$

que es la distancia del punto Q a la recta

Ejemplo 6.13 *Hallar la distancia del punto* $Q = (1, -1, 1)$ *a la recta* $x = 1 + t$; $y = -1 + 2t$; $z = 2 - 2t$

$$d = \frac{\left\| \overrightarrow{PQ} \times V \right\|}{\|V\|} = \frac{\left\| \overrightarrow{P_0Q} \times V \right\|}{\|V\|}$$

$P = (1,-1,2)$; $Q = (1,-1,1)$; $V = (1,2,-2)$, luego
$Q - P = (1,-1,1) - (1,-1,2) = (0,0,-1)$, luego

$$\overrightarrow{PQ} \times V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2i - j = (2,-1,0)$$

$$\text{Luego } d = \frac{\|(2,-1,0)\|}{\|(1,2,-2)\|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{o}$$

$$h = \sqrt{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 - \frac{\left\|\overrightarrow{PQ} \cdot V\right\|^2}{\|V\|^2}}, \quad \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot V}{\|V\|} = \frac{(0,0,-1) \cdot (1,2,-2)}{3} = \frac{2}{3}$$

$$h = \sqrt{\|(0,0,-1)\|^2 - \frac{4}{9}} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9-4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Ejemplo 6.14 *Hallar la ecuacion de la recta que pasa por $P = (0,2,1)$ y tiene por vector direccion al vector j*

En efecto la ecuacion de la recta es $X = P + tV$,
$(x,y,z) = (0,2,1) + t(0,1,0) = (0,2+t,1)$ por tanto $x = 0$, $y = 2+t$, $z = 1$

Ejemplo 6.15 *Un plano contiene a la recta $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$ y al punto $Q = (2,1,0)$ hallar su ecuacion.*

Un punto de la recta es $(0,1,-1) = P$, $Q = (2,1,0)$ entonces $Q - P = (2,0,1)$ y como el vector direccion de la recta es $(2,1,1)$ entonces un vector normal del plano es

$$(Q-P) \times V = (2,0,1) \times (2,1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,0,2) = N \text{ luego}$$

$-1(x-2) + 0(y-1) + 2(z-0) = 2z - x + 2 = 0$ es la ecuacion del plano

Ejemplo 6.16 *Un plano contiene a las rectas $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$, $\frac{x}{-4} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2}$ hallar su ecuacion.*

Un punto de la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$ es $P=(1,2,0)$ y un punto de la recta $\frac{x}{-4}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{2}$ es $Q=(0,0,-1)$ entonces $Q-P=(-1,-2,-1)$ y como el vector direccion de la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$ es $(2,1,-1)$ entonces un vector normal del plano es $(Q-P)\times V=(-1,-2,-1)\times(2,1,-1)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(3,-3,3)=N$ luego

$3(x-1)-3(y-2)+3(z-0)=3x-3y+3z+3=0$, por tanto $x-y+z+1=0$ es la ecuacion del plano.

Ejemplo 6.17 *Un plano contiene a la recta $x+y-z=0$, $-2y+3z=3$ y es paralelo al plano $x-y+2z=5$ hallar su ecuación.*

Un punto de la recta es $(1,0,1)$ y un vector normal al plano es $(1,-1,2)$ luego la ecuacion del plano es $1(x-1)-1(y-0)+2(z-1)=x-y+2z-3=0$

Ejemplo 6.18 *Hallar la ecuacion de la recta que pasa por $(1,1,0)$ y es paralela a la recta $\frac{x+2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$.*

Como la recta es paralela a la recta $\frac{x+2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$ un vector direccion es $(1,-1,2)$ y como pasa por $(1,1,0)$ su ecuacion es $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$.

Ejemplo 6.19 *El angulo que forman las rectas $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$ y $x=3-t$, $y=2+t$, $z=1-t$ es $90°$ ya que*

$$A\cdot B=\|A\|\,\|B\|\cos\theta, \text{ luego}$$

$$\cos\theta=\frac{A\cdot B}{\|A\|\,\|B\|}=\frac{(3,2,-1)\cdot(-1,1,-1)}{\sqrt{14}\sqrt{3}}=\frac{-3+2+1}{\sqrt{14}\sqrt{3}}=\frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{3}}=0 \text{ entonces}$$

$$\cos\theta=0, \text{ luego } \theta=90°$$

Ejemplo 6.20 *Un vector direccion de la recta $x+y-2z=4, x+y-1=0$ es $(1,-1,0)$. En efecto como $x+y-1=0$ entones $y=1-x$ y reemplazamos en $x+y-2z=4$ obtenemos que $x+1-x-2z=4$ entonces $2z=-3$ o que $z=\frac{-3}{2}$, luego la ecuacion de la recta es $y=1-x$, $z=\frac{-3}{2}$, es decir, $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}, z=\frac{-3}{2}$ luego un vector direccion es $(1,-1,0)$. o tambien lo podemos calcular haciendo el producto cruz de los vectores normales de los planos $x+y-2z=4$, $x+y-1=0$, es decir,*

$$(1,1,-2)\times(1,1,0)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=(2,-2,0)=2\,(1,-1,0)$$

Ejemplo 6.21 *Hallar el valor de* a *y* b *para que la recta* $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{a}=\dfrac{z-1}{4}$, *sea perpendicular al plano* $x+3y+bz=1$.

En efecto $(2,a,4)\times(1,3,b)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & a & 4\\ 1 & 3 & b\end{vmatrix}=(ab-12,4-2b,6-a)=(0,0,0)$ entonces

$$a=6 \text{ y } b=2$$

Ejemplo 6.22 *Hallar la ecuacion del plano que pasa por* $(1,1,2)$, *perpendicular a* $x+y-2z=3$ *y paralelo a la recta* $x-2y+z=0$, $x=1$.

Un vector director de la recta es $(1,-2,1)\times(1,0,0)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=(0,1,2)$

Sea (a,b,c) un vector normal del plano. Como el plano es perpendicular al plano $x+y-2z=3$ entonces $(a,b,c)\cdot(1,1,-2)=0$, *es decir*, $a+b-2c=0$ y como el plano es paralelo a la recta entonces $(a,b,c)\cdot(0,1,2)=0$, es decir, $b+2c=0$ y la solucion del sistema es $(4c,-2c,c)=c\,(4,-2,1)=N$ un vector normal del plano luego la ecuacion es

$$4\,(x-1)-2\,(y-1)+1\,(z-2)=4x-2y+z-4=0$$

Ejemplo 6.23 *Hallar la ecuacion del plano que pasa por* $(1,0,1)$ *y contiene a la recta* $x-2y+z=1$, $x+y=2$.

La recta $x-2y+z=1$, $x+y=2$ se puede escribir como $\dfrac{x-2}{-1}=y=\dfrac{z+1}{3}$. Sean $(2,0,-1)=Q$ un punto de la recta y $P=(1,0,1)$ punto del plano entonces un vector normal del plano se puede hallar por

$$(P-Q)\times(-1,1,3)=(-1,0,2)\times(-1,1,3)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 3\end{vmatrix}=(-2,1,-1)=N \text{ entonces}$$

$$-2\,(x-1)+(y-0)-1\,(z-1)=0=y-2x-z+3=0$$

Ejemplo 6.24 *Hallar la ecuacion del plano perpendicular a la recta* $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-4}{-6}$ *y que pasa por* $(1,4,-6)$.

Como el plano perpendicular a la recta $\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-4}{-6}$ entonces un vector normal del plano es el vector direccion de la recta luego $(5,2,-6)=N$, entonces $5(x-1)+2(y-4)-6(z+6)=0=5x+2y-6z-49=0$ es la ecuacion del plano

Ejemplo 6.25 *Una recta pasa por el punto* $(0,-1,3)$ *y es paralela a la recta* $\frac{x-1}{8}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z}{5}$. *hallar la ecuacion parametrica*

Como la recta es paralela a la recta $\frac{x-1}{8}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z}{5}$ tiene por vector direccion el vector $(8,-2,5)$ por tanto su ecuacion es $\frac{x-0}{8}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{5}$ y por tanto la ecuacion parametrica es $x=8t,\ y+1=-2t,\ z-3=5t$

Ejemplo 6.26 *Hallar la distancia del punto* $(4,35,70)$ *al plano que tiene por ecuacion* $5y+12z=1$

La ecuacion de la recta que pasa por $(4,35,70)$ y es perpendicular al plano $5y+12z=1$ es $x=4,\ y=35+5t,\ z=70+12t$ y el punto de interseccion de la recta y el plano es $(4,5,-2)$ pues $5(35+5t)+12(70+12t)-1=0=169t+1014=0$,si $t=-6$, por tanto $x=4,\ y=35+5t=35-30=5,\ z=70+12t=-2$. Ahora la distancia del punto $(4,35,70)$ al punto $(4,5,-2)$ es $\sqrt{0+(30)^2+(72)^2}=78$

Ejemplo 6.27 *La recta que pasa por* $(-4,2,5)$ *y es paralela al eje z es* $(x,y,z)=(-4,2,5)+t(0,0,1)$

Ejemplo 6.28 *Un vector director de la recta* $x-y=0, y+z=2$ *es* $(1,-1,0)\times(0,1,1)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-1,-1,1)$

Ejemplo 6.29 *Hallar la ecuacion de la recta que pasa por* $(1,1,1)$ *es paralela al plano* $x-y+z=3$ *y corta a la recta* $x=1, y=3, z=t$.

Un vector director de la recta es $(1,3,t)-(1,1,1)=(0,2,t-1)$ y como la recta es paralela al plano entonces $(0,2,t-1)\cdot(1,-1,1)=0$ es decir $-2+t-1=0$, luego $t=3$, entonces $(0,2,t-1)=(0,2,2)=2(0,1,1)$ y por tanto $(x,y,z)=(1,1,1)+t(0,1,1)$

Ejemplo 6.30 *Hallar la distancia del punto* $Q=(2,1,3)$ *a la recta* $2x-y-z=3$, $x-y+z=2$.

Eliminando x y y de las dos ecuaciones se tiene que $x = 1 + 2z, \;\; y = -1 + 3z$, entonces $x = 1 + 2t, \;\; y = -1 + 3t, \;\; z = t$ es una ecuacion parametrica de la recta y ahora se calcula la ecuacion del plano que pasa por $Q = (2, 1, 3)$ y es perpendicular a la recta $x = 1 + 2t, \;\; y = -1 + 3t, \; z = t$ y esta viene dada por $2(x-2) + 3(y-1) + 1(z-3) = 0 = 2x + 3y + z - 10 = 0$. El punto de interseccion de la recta y el plano lo obtenemos asi: $2(1+2t) + 3(-1+3t) + 1t - 10 = 0 = 14t - 11 = 0$, entonces $t = \dfrac{11}{14}$ por tanto el punto de interseccion es $P = \left(\dfrac{18}{7}, \dfrac{19}{14}, \dfrac{11}{14}\right)$ y asi la distancia de P a Q es $\left\|\overrightarrow{QP}\right\| = \left\|\left(\dfrac{4}{7}, \dfrac{5}{14}, \dfrac{-31}{14}\right)\right\| = \sqrt{\dfrac{1050}{196}} = \sqrt{\dfrac{75}{14}}$

Ejemplo 6.31 *Hallar la ecuacion de la recta paralela a* $x + 2z = 5, \; y + 3z = 5$ *que pasa por el punto de interseccion de la recta* $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z+2}{3}$ *y el plano* $x - y + z = 7$

El punto de interseccion de la recta $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z+2}{3}$ y el plano $x - y + z = 7$ es $(5, -1, 1)$, un vector direccion de la recta $x + 2z = 5, \; y + 3z = 5$ es $d = (1,0,2) \times (0,1,3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-2, -3, 1) = -(2, 3, -1)$ que es un vector direccion de la recta buscada por lo tanto la ecuacion es $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$

Ejemplo 6.32 *Hallar la ecuacion de una recta contenida en el plano* $x + 2y + 3z = 1$ *y que pase por el punto* $(2, 1, -1)$ *y perpendicular a la recta* $x - 2z + 3 = 0, \; y - z = 4$

Un vector direccion es $(2,1,1) \times (1,2,3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (1, -5, 3)$ luego $x = 2 + t, \; y = 1 - 5t, \; z = -1 + 3t$

Ejemplo 6.33 *Hallar la ecuacion del plano que pasa por los puntos* $A = (1, -3, 2)$ $B = (0, 1, 1)$ *y es paralelo a la recta* $3x - 2y + 1 = 0, \; 2y + 3z - 3 = 0$

Un vector director de la recta $3x - 2y + 1 = 0, \; 2y + 3z - 3 = 0$ es $(3, -2, 0) \times (0, 2, 3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-6, -9, 6) = -3(2, 3, 2)$ $\overrightarrow{AB} = (B - A) = (-1, 4, -1)$ y un vector normal del plano es

$(2,3,-2)\times(-1,4,-1)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & 4 & -1\end{vmatrix}=(5,4,11)$ luego la ecuacion del plano es

$$5(x-0)+4(y-1)+11(z-1)=0=5x+4y+11z-15=0$$

Ejemplo 6.34 *Hallar la ecuacion del plano que contiene a la recta* $\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-y}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ *y es perpendicular al plano* $x+3y-3z+3=0$

Un vector normal del plano es $(2,-1,3)\times(1,3,-3)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 3 & -3\end{vmatrix}=(-6,9,7)$

$=1(6,-9,-7)$ luego

$6(x-0)-9(y-1)-7(z+1)=0=6x-9y-7z+2=0$, donde el punto $(0,1,-1)$ es de la recta $\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-y}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ por tanto del plano buscado

Ejemplo 6.35 *Hallar* p *para que las rectas sean* $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ *y* $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-p}{p-1}=\dfrac{z-3}{3}$ *sean perpendiculares, el punto de interseccion y el plano que las contiene.*

En efecto $(4,-2,2)\cdot(1,p-1,3)=4-2p+2+6=0=12-2p=0$ luego $p=6$ por tanto $x=4t,\quad y=1-2t,\ z=2t\quad y\ \ x=1+u,\ y=6+5u, z=3+3u$ son ecuaciones parametricas y el punto de interseccion es $(0,1,0)$ y se halla resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 4t &= 1+u\\ 1-2t &= 6+5u \quad \text{obteniendo } u=-1,\ t=0\\ 2t &= 3+3u \end{aligned}$$

La ecuacion del plano que contiene las recta tiene como un vector normal a

$(4,-2,2)\times(1,5,3)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 4 & -2 & 2\\ 1 & 5 & 3\end{vmatrix}=(-16,-10,22)=-2(8,5,-11)$ luego su ecuacion es $8(x-0)+5(y-1)-11(z-0)=0=8x+5y-11z-5=0$

Ejemplo 6.36 *Hallar la ecuacion de una recta situada en el plano* $x+2y+3z-1=0$ *y que pase por el punto* $(2,1,-1)$ *y que sea perpendicular a la recta* $x-2z+3=0, y-z-4=0$

Un vector director de la recta $x-2z+3=0, y-z-4=0$ es

$$(1,0,-2)\times(0,1,-1)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=(2,1,1)$$

Un vector director de la recta buscada es $(2,1,1)\times(1,2,3)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=(1,-5,3)$ El punto $(2,1,1)$ pertenece al plano y a la recta luego la ecuacion de la recta es

$$x=2+t,\ y=1-5t, z=-1+3t$$

Ejemplo 6.37 *Hallar la ecuacion del plano que contiene a la recta* $x=-1+3t,\ y=1+2t,\ z=2+t$ *y es perpendicular al plano* $2x+y-3z+4=0$

Un vector normal del plano es $(3,2,1)\times(2,1,-3)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=(-7,11,-1)$
$=-(7,-11,1)$ y un punto del plano es $(-1,1,2)$ luego la ecuacion es
$$7(x+1)-11(y-1)+1(z-2)=0=7x-11y+z+16=0$$

Ejemplo 6.38 *Hallar los puntos de la recta* $x+y=0, x-z=0$ *que disten* $\frac{1}{3}$ *del plano* $2x-y+2z+1=0$

Una ecuacion parametrica de la recta $x+y=0, x-z=0$ es $x=t$, $y=-t,\ z=t$ pues $y=-x$, $z=x$ luego se tiene $P=(t,-t,t)$ asi que la distancia de P al plano $2x-y+2z+1=0$ es $\left|\frac{2t+t+2t+1}{\sqrt{4+1+4}}\right|=\left|\frac{5t+1}{\sqrt{4+1+4}}\right|=\frac{1}{3}$ entonces $|5t+1|=1$ por tanto $t=0$ *y* $t=-\frac{2}{5}$ asi que los puntos son $(0,0,0)$ y $\left(-\frac{2}{5},-\frac{2}{5},-\frac{2}{5}\right)$

Ejemplo 6.39 *Hallar la ecuacion de la recta que pasa por* $(1,2,2)$ *y es perpendicular a las rectas* $x+2y-3z-1=0,\ x+2y-z=0$ *y* $3x-y+3z=0,\ x+4y-2=0.$

Un vector direccion de la recta $x+2y-3z-1=0$, $x+2y-z=0$ es
$(1,2,-3)\times(1,2,-1)=(4,-2,0)=2(2,-1,0)$
y un vector direccion de la recta $3x-y+3z=0$, $x+4y-2=0$ es
$(3,-1,3)\times(1,4,0)=(-12,3,13)$

Un vector direccion de la recta pedida es
$(2,-1,0)\times(-12,3,13)=(-26,-52,-12)=-2(13,26,6)$ y como la recta pasa por el punto $(1,2,2)$ entonces su ecuacion es $\frac{x-1}{13}=\frac{y-2}{26}=\frac{z-2}{6}$

6.2 EJERCICIOS PROPUESTOS CAPITULO 6

1. Hallar la ecuación simétrica , vectorial y paramétrica de la recta que pasa por $(1,2,3)$ y por $(4,3,1)$ resp $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2}$

2. Hallar la ecuación vectorial, simétrica y paramétrica de la recta que pasa por $(1,2,4)$ y tiene por vector derección $(3,6,2)$ resp $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-4}{2}$

3. Hallar dos puntos de la recta y el vector dirección si: $\dfrac{3-2x}{4} = \dfrac{-y+6}{2} = \dfrac{3z-5}{3}$ resp $\dfrac{3-2x}{4} = t, \dfrac{-y+6}{2} = t, \dfrac{3z-5}{3} = t$, y darle dos valores a t y despejar

4. En que punto la recta $x = 1+3t;\ y = 2-t;\ \ z = 2+5t$ corta al plano $z = 0$. *resp* $\left(\frac{-1}{5}, \frac{12}{5}, 0\right)$

5. Una recta pasa por $(2,3,4)$ y es paralela al plano xz y yz, cuál es su ecuación. Rta.$v = (0,0,1)$ $x = 2, y = 3$, $z = 4+t$

6. Una recta pasa por $(2,3,4)$ y es perpendicular al plano yz y paralela al plano xy Rta.$v = (1,0,0)$

7. Mostrar que los puntos $(2,3,0)$, $(-6,3,2)$ pertenecen a la recta que pasa por $(-2,3,1)$ y es paralela al vector $4i-k$

8. Mostrar que las rectas:

   $x = 4t+2, y = 3, z = -t+1$ y

   $x = 2u+2, y = 2u+3, z = u+1$,

   se cortan en $(2,3,1)$ y el ángulo entre ellos es arccos$\dfrac{7\sqrt{17}}{51}$

9. Hallar el punto de intersección y el ángulo entre las rectas:

   (a) $r(t) = (i - 4\sqrt{3}j) + t(i + \sqrt{3}j)$
   $r(u) = (4i + 3\sqrt{3}j) + u(i - \sqrt{3}j)$
   Rta.$(6, \sqrt{3}, 0); \theta = \dfrac{2\pi}{3}$

(b) $x_1(t) = 3 + t$; $y_1(t) = 1 - t$; $z_1(t) = 5 + 2t$
$x_2(u) = 1$; $y_2(u) = 4 + u$; $z_2(u) = 2 + u$
Rta. $(1, 3, 1); \theta = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{6})$

10. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-2, 0, 3)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(-5, 1, 2)$, $(2, -3, -4)$.

    Rta. $x = -2 + 2t; y = -16t; z = 3 + 13t$

11. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(4, -5, 20)$ y es perpendicular a $x + 3y - 6z - 8 = 0$

    Rta. $x - 4 = \frac{y+5}{3} = \frac{z-20}{-6}$

12. Mostrar que la recta $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{4}$ está en el plano $x - 2y + z = 6$ despejar x, y, z y reemplazar y ver la igualdad

13. Mostrar que la recta de intersección de los planos $4x - 3y + z - 2 = 0$; $2x + 5y - 3z + 4 = 0$, es
    $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{7} = \frac{z-7}{13}$

14. Mostrar que las rectas

    $\{3x - y - z = 0; 8x - 2y - 3z + 1 = 0\}$ y

    $\{x - 3y + z + 3 = 0; 3x - y - z + 5 = 0\}$ son paralelas

15. El punto de intersección de $\frac{x-2}{4} = -\frac{1}{2}(y + 3) = \frac{1}{7}(z - 1)$ y $5x - y + 2z - 12 = 0$ es $(\frac{5}{3}, -\frac{17}{6}, \frac{5}{12})$

16. Mostrar que las rectas $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-3}$ y $x - 2 = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+3}{2}$ son oblicuas; es decir, hay que mostrar que no se cortan y que no son paralelas.

17. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(1, -1, 1)$, perpendicular a la recta $3x = 2y = z$ y paralela al plano $x + y - z = 0$

    Rta. $\frac{x-1}{9} = \frac{y+1}{-8} = \frac{z-1}{1}$

18. Dados los planos $x + 3y - z - 9 = 0$ y $2x - 3y + 4z + 3 = 0$ hallar la recta de intersección.

    Rta. $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-7/3}{2} = \dfrac{z-0}{3}$

19. Determinar si la recta $x = -2 - 4t, y = 3 - 2t, z = 1 + 2t$ y el plano $2x + y - z = 5$ son paralelos resp no

20. Determinar si la recta y el plano son paralelos: $x = -5 - 4t, y = 1 - t, z = 3 + 2t$ y $x + 2y + 3z - 9 = 0$ resp si

21. Hallar las ecuaciones de la recta de intersección de los planos dados

    (a) $7x - 2y + 3z = -2; -3x + y + 2z + 5 = 0$
    Rta. $x = -12 - 7t, y = -41 - 23t; z = t$

    (b) $2x + 3y - 5z = 0; y = 0$
    Rta. $x = \dfrac{5t}{2}, y = 0, z = t$

22. Encontrar la ecuación del plano que contiene al punto $(1, -1, 2)$ y a la recta $x = t, y = t + 1, z = -3 + 2t$

    Rta. $3x - y - z - 2 = 0$

23. Demostrar que la recta $x - 5 = -t, y + 3 = 2t, z + 1 = -5t$ es paralela al plano $-3x + y + z - 9 = 0$

24. Hallar la distancia del punto $(1, 3, -2)$ a la recta $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-5}{-1}$

25. Determinar si la recta $x = -2 - 4t, y = 3 - 2t, z = 1 + 2t$ y el plano $2x + y - z = 5$ son perpendiculares Resp si $V \times N = 0$

26. Hallar las ecuaciones de los dos planos cuya intersección es la recta $x = 7 - 4t, y = -5 - 2t, z = 5 + t$

    Rta. $x - 2y - 17 = 0$ y $x + 4z - 27 = 0$

27. Determine las ecuaciones: Vectorial, Parametricas y cartesiana de la recta que pasa por el punto y que es paralela al vector V.

    (a) $(2, 4, 6)$; $V = (1, 2, 5)$ $X(t) = (2, 4, 6) + t\,(1, 2, 5)$

    (b) $(-3, 2, -4)$ $V = (5, -7, -3)$ $X(t) = (-3, 2, -4) + t\,(5, -7, -3)$

(c) $(1,1,5)$; $V=(0,0,1)$ $X(t)=(1,1,5)+t\,(0,0,1)$

(d) $(0,0,0)$; $V=(1,1,1)$ $X(t)=t\,(1,1,1)$

(e) $(1,3,0)$; $V=(1,3,0)$ $X(t)=(1,3,0)+t\,(1,3,0)$

(f) $(3,3,3)$; $V=(4,0,2)$ $X(t)=(3,3,3)+t\,(4,0,2)$

28. Determine las ecuaciones parametricas y cartesiana de la recta que pasa por los puntos dados:

    (a) $(6,-1,5)$ $(7,2,-4)$ $X(t)=(6,-1,5)+t\,(1,3,-9)$

    (b) $(0,0,0)$ $(-1,-1,-1)$ $X(t)=t\,(-1,-1,-1)$

29. Hallar la distancia del punto dado a la recta dada:

    (a) $(2,3,5)$ Recta: $x=1+2k,$ $y=2+3k,$ $z=3+4k$ Resp $\sqrt{\frac{5}{29}}$

    (b) $(0,0,0)$ Recta: $x+4-k,$ $y-3=-k,$ $z+5=2k$ Resp $\sqrt{\frac{11}{6}}$

    (c) $(2,3,5)$ Recta: $\dfrac{(x+1)}{2}=\dfrac{(y-2)}{-1}=\dfrac{(z+3)}{4}$ Resp $\sqrt{\frac{185}{21}}$

30. Hallar la ecuacion del plano que contiene a la recta $\dfrac{(x-2)}{1}=\dfrac{(y-1)}{3}=\dfrac{(z+1)}{1}$ y al punto $(0,1,0)$ resp $x-y+2z=-1$

31. Hallar las ecuaciones parametricas y cartesiana de la recta de intersección de los planos dados:

    (a) $-2x+3y+7z+2=0$ $x+2y-3z+5=0$

    (b) $3x-5y+2z=0$ $z=0$

32. Encuentre el punto de intersección de la recta:

    $x-4=5t$ $y+2=t$ $z-4=-t$

    y el plano $3x-y+7z+8=0$

33. Determine el plano que pasa por el punto $(2,-7,6)$ y que es paralelo al plano: $5x-2y+z-9=0$ resp $5x-2y+z=30$

34. ¿Para que valor de m, la recta: $\dfrac{(x+1)}{3}=\dfrac{(y-2)}{m}=\dfrac{(z+3)}{-2}$ es paralela al plano: $x-3y++6z+7=0$? resp $m=-3$

35. ¿Para qué valores de A y D de la recta $x = 3 + 4t \qquad y = 1 - 4t \qquad z = -3 + t$ esta situada en el plano: $Ax + 2y - 4z + D = 0$? resp $A = 3, D = -23$

36. ¿Para que valores de A y B el plano: $Ax + By + 3z - 5 = 0$ es perpendicular a la recta: $x = 3 + 2t \qquad y = 5 - 3t \qquad z = -2 - 2t$? resp $A = -3, B = \frac{9}{2}$

Capítulo 7

ESPACIOS VECTORIALES

Sea V un conjunto no vacío de objetos (llamados vectores) sobre el cual se han definido dos operaciones, una suma de dos objetos x,y en V y una multiplicación de un objeto x $\in V$, por un número real α y si el conjunto $(V, +, \cdot)$, con las dos operaciones definidas, satisface las propiedades:

1. Si para todo $x, y \in V$ entonces $x + y \in V$
2. Para todo $x, y \in V$, $x + y = y + x$
3. Para todo vector $x, y, z \in V$, $(x + y) + z = x + (y + z)$
4. Existe un vector y en V, denominado el vector 0 (único) tal que $x + y = y + x = x$
5. Para todo $x \in V$, existe un z en V, denominado el negativo de x en V (único) tal que $x + z = z + x = y$ $(z = -x)$
6. Si α es un número real cualquiera y x está en V, entonces $\alpha x \in V$
7. Si α es un número real cualquiera, $x, y \in V$ entonces $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
8. Si α, β son números reales cualquiera y x está en V entonces $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
9. Si α, β son números reales cualquiera y x está en V entonces $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
10. $1 \cdot x = x$

Entonces $(V, +, \cdot)$ se llama un espacio vectorial real y si alguna de las diez propiedades no se cumple se dice que $(V, +, \cdot)$ no es un espacio vectorial real.

Propiedades. Sea V un espacio vectorial, x un vector en V y α un número real, entonces

1. $0x = 0$ En efecto $0 + 0 = 0$ entonces $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$ y sumando $-0x$ se obtiene el resultado que $0x = 0$

2. $\alpha 0 = 0$ Sabemos que $0 + 0 = 0$, luego $\alpha 0 = \alpha(0 + 0) = \alpha 0 + \alpha 0$ y sumando $-\alpha 0$ en ambos lados de la igualdad se obtiene $\alpha 0 - \alpha 0 = (\alpha 0 + \alpha 0) - \alpha 0$ entonces $0 = \alpha 0$

3. $(-1)x = -x$ Como $\alpha + (-\alpha) = 0$, $0 = 0x = (\alpha + (-\alpha))x = \alpha x + (-\alpha x)$ y sumando $-\alpha x$ se obtiene $0 - \alpha x = (-\alpha x)$

4. Si $\alpha x = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$ o $x = 0$ si $\alpha \neq 0$, entonces $\alpha x = 0 \Longrightarrow \alpha^{-1}\alpha x = \alpha 0 = 0 \Longrightarrow x = 0$

5. Existe un único vector 0.En efecto: Supongamos que hay dos ceros: 0 y $0'$ tal que $0 + 0' = 0'$ y $0' + 0 = 0$ entonces $0' = 0 + 0' = 0' + 0 = 0 \Rightarrow 0' = 0$

6. Para cada $A \in V$, existe un único A' tal que: $A + A' = 0$.

En efecto sean A', A''entonces

$$A' = 0 + A' = A' + 0 = A' + (A + A'') = (A' + A) + A'' = 0 + A'' = A''$$

luego $A' = A''$

Veamos algunos ejemplos de Espacios Vectoriales

Ejemplo 7.1 *Sea V, el conjunto de los números reales R con las operaciones usuales (conocidas), entonces $(R, +, \cdot)$ es un espacio vectorial real, ya que se satisfacen las diez propiedades.en forma análoga $(R^2, +, \cdot), (R^n, +, \cdot)$*

Ejemplo 7.2 *$V = N$, numeros naturales, con las operaciones usuales, no es un espacio vectorial real, pues por ejemplo el negativo de 5 (-5), no pertenece a V y $\alpha = -\sqrt{2}, \alpha x$ si x es un numero naural no pertenece a V.*

Ejemplo 7.3 *$V = Q$, numeros racionales, con las operaciones usuales, no es un espacio vectorial real, pues por ejemplo con $\alpha = \sqrt{2}, \sqrt{2}x$ si x es un numero racional no pertenece a V.*

Ejemplo 7.4 *$V = \mathbb{R}^2$; con las operaciones usuales, es decir, $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ y $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$ es un espacio vectorial .*

En efecto, mostremos que cumple las diez propiedades:

1. *Sean $x, y \in V$ entonces $x + y = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in V$, pues $a + c$ y $b + d$ son números reales*

2. *Sean $x, y \in V$ entonces $x + y = y + x$. En efecto, $x + y = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b) = y + x$*

3. *Sean* $x, y, z \in V$, *entonces* $(x+y)+z = x+(y+z)$. *En efecto,* $(x+y)+z = ((a,b)+(c,d))+(m,n) = (a+c, b+d)+(m,n) = (a+c+m, b+d+n =$
   $(a,b)+(c+m, d+n) = (a,b)+[(c,d)+(m,n)] = x+(y+z)$
4. $x+y = y+x = x$. *En efecto,* $x+y = (a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) = (a,b)$, *entonces* $a+c = a$ *y* $b+d = b$, *luego* $c = 0$ *y* $d = 0$ *y así el vector cero del espacio es* $(0,0)$
5. $x+y = y+x = 0$
   $x+y = (a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) = (0,0)$, *luego* $a+c = 0$ *y* $b+d = 0$ *entonces* $c = -a$ *y* $d = -b$, *por tanto el negativo de* $x = (a,b)$ *es* $(-a,-b)$, *pues* $(a,b)+(-a,-b) = (-a,-b)+(a,b) = (0,0)$
6. $\alpha x = \alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b) \in V$, *ya que* $\alpha a, \alpha b$ *son números reales*
7. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
   $\alpha((a,b)+(c,d)) = \alpha(a+c, b+d) = (\alpha(a+c), \alpha(b+d)) = (\alpha a + \alpha c, \alpha b + \alpha d) =$
   $(\alpha a, \alpha b) + (\alpha c, \alpha d) = \alpha(a,b) + \alpha(c,d) = \alpha x + \alpha y$
8. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$, *en efecto,*
   $(\alpha+\beta)x = (\alpha+\beta)(a,b) = ((\alpha+\beta)a, (\alpha+\beta)b) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b) = (\alpha a, \alpha b) + (\beta a, \beta b) = \quad \alpha(a,b) + \beta(a,b) = \alpha x + \beta x$
9. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, *en fecto* $\alpha(\beta x) = \alpha(\beta(a,b)) = \alpha(\beta a, \beta b) = (\alpha\beta a, \alpha\beta b) = (\alpha\beta)(a,b) = (\alpha\beta)x$
10. $1 \cdot x = x$

Ejemplo 7.5 *En forma análoga se puede demostrar que* $R^3, R^4, ..., R^n$ *con las operaciones usuales es un espacio vectorial.*

Ejemplo 7.6 $V = \{3\}$ *El conjunto formado por el numero 3 con* $3+3 = 3$ *y* $\alpha.3 = 3$ *es un espacio vectorial pues*

1. $x+y = y+x$, *ya que* $3+3 = 3+3$ *y* 3 *pertenece a* V
2. $x+(y+z) = (x+y)+z$; *ya que* $3+(3+3) = 3+3 = 3 = (3+3)+3 = 3+3 = 3$
3. $x+y = x$; *como* $3+3 = 3$ *entonces* $y = 3$, *luego el vector cero es en este caso el 3*
4. $x+y = y+x = 3 \Longleftrightarrow 3+3 = 3 \Longleftrightarrow y = 3$, *es decir, el inverso aditivo de 3, es en este caso* 3

5. *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$; $x \in V$; $\alpha x \in V$ *ya que* $\alpha 3 = 3 \in V$

6. *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$, *y* x, y *están en* V, *entonces* $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$. *En efecto,* $\alpha(3 + 3) = \alpha(3) = 3 = 3 + 3 = \alpha 3 + \alpha 3$

7. *Si* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *entonces* $(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x$. *En efecto,* $(\alpha+\beta)3 = 3 = 3+3 = \alpha 3+\beta 3$

8. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, *en fecto* $\alpha(\beta 3) = \alpha 3 = 3 = (\alpha\beta)3$

9. $1 \cdot x = x, 1 \cdot 3 = 3$

Ejemplo 7.7 *Sea* $V = \mathbb{R}^+$ *y definamos la suma por* $x + y = xy$ *y* $\alpha x = x^\alpha$ *es un espacio vectorial real pues:*

1. $x + y = xy$ *y como x,y son reales positivos,* xy *es un real positivo y así* $x + y \in V$

2. $x + y = y + x$, *ya que* $x + y = xy = yx = y + x$

3. $x+(y+z) = (x+y)+z$; *ya que* $x+(y+z) = x+yz = xyz = (x+y)z = (x+y)+z$

4. $x + y = x$; *como* $x + y = xy = x$ *entonces* $y = 1$, *luego el vector cero es en este caso el 1*

5. $x + y = y + x = 1 \Longleftrightarrow x + y = xy = 1 \Longleftrightarrow y = \dfrac{1}{x}$, *es decir, el inverso aditivo de x, es en este caso* $\dfrac{1}{x}$

6. *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$; $x \in V$; $\alpha x = x^\alpha \in V$

7. *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$, *y* x, y *están en* V, *entonces* $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$. *En efecto,* $\alpha(x + y) = \alpha(xy) = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = x^\alpha + y^\alpha = \alpha x + \alpha y$

8. *Si* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *entonces* $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$. *En efecto,* $(\alpha + \beta)x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = x^\alpha + x^\beta = \alpha x + \beta x$

9. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, *en fecto* $\alpha(\beta x) = \alpha(x^\beta) = x^{\alpha\beta} = (\alpha\beta)x$

10. $1 \cdot x = x^1 = x$

Ejemplo 7.8 $V = \mathbb{R}^2$; *con las operaciones* $(a, b)+(c, d) = (a+d, b+c)$ *y* $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$ *no es es un espacio vectorial . En efecto, mostremos que no cumple por ejemplo la propiedad 2*

$$\text{Si } x, y \in V \text{ entonces } x + y \neq y + x. \text{ ya que },$$
$$x + y = (2,3) + (4,6) = (2+6, 3+4) = (8,7) \neq (4,6) + (2,3) = (7,8)$$

Ejemplo 7.9 *$V = \mathbb{R}^2$; con las operaciones $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ y $\alpha(a,b) = (2a, 2b)$ no es es un espacio vectorial . En efecto, mostremos que no cumple por ejemplo la propiedad $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$*

$$\text{Si } x \in V \text{ y } \alpha, \beta \in R \text{ entonces } (\alpha+\beta)x = (\alpha+\beta)(a,b) = (2a, 2b) \text{ y}$$
$$\alpha x + \beta x = \alpha(a,b) + \beta(a,b) = (2a,2b) + (2a,2b) = (4a,4b) \text{ luego .}$$
$$(\alpha+\beta)x \neq \alpha x + \beta x$$

Ejemplo 7.10 *Sea $V = \mathbb{R}^2$, donde $(a,b)+(c,d) = (a+c+1, b+d+1)$ y $\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$, no es un espacio vectorial*

1. $x + y = (a,b) + (c,d) = (a+c+1, b+d+1) \in V$
2. $x+y = y+x \Longrightarrow x+y = (a,b)+(c,d) = (a+c+1, b+d+1) = (c+a+1, d+b+1) = (c,d) + (a,b) = y + x$
3. $(x+y)+z = x+(y+z) \Longrightarrow (x+y)+z = ((a,b)+(c,d))+(m,n) = (a+c+1, b+d+1)+(m+n) = (a+c+1+m+1, b+d+1+n+1) = (a,b)+(c+m+1, d+n+1) = (a,b) + [(c,d) + (m,n)] = x + (y+z)$
4. $x + y = y + x = x \Longrightarrow x + y = (a,b) + (c,d) = (a+c+1, b+d+1) = (a,b)$ *entonces* $a + c + 1 = a$ *y* $b + d + 1 = b$ *entonces* $c = -1; d = -1$ *luego el vector* 0 *es* $(-1,-1)$
5. $x + y = (-1,-1) = y + x \Longrightarrow (a,b) + (c,d) = (a+c+1, b+d+1) = (-1,-1)$, *luego* $a + c + 1 = -1$ *y* $b + d + 1 = -1$, *así que* $c = -a-2; d = -b-2$ *luego* $(a,b) + (-a-2, -b-2) = (-1,-1)$ *ya que* $(a,b) + (-a-2, -b-2) = (-1,-1)$ *ya que* $(a,b) + (-a-2, -b-2) = (a-a-2+1, b-b-2+1) = (-1,-1)$
6. $\alpha x = \alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b) \in V$
7. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \Longrightarrow \alpha(x+y) = \alpha[(a,b) + (c,d)] = \alpha[(a+c+1, b+d+1)] = (\alpha(a+c+1), \alpha(b+d+1)) = (\alpha a + \alpha c + \alpha, \alpha b + \alpha d + \alpha)$

   $\alpha x + \alpha y = \alpha(a,b) + \alpha(c,d) = (\alpha a, \alpha b) + (\alpha c, \alpha d) = (\alpha a + \alpha c + 1, \alpha b + \alpha d + 1)$, *luego* $\alpha(x+y) \neq \alpha x + \alpha y$
8. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \Longrightarrow (\alpha+\beta)(a,b) = ((\alpha+\beta)a, (\alpha+\beta)b) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b)$

   $\alpha x + \beta x = \alpha(a,b) + \beta(c,d) = (\alpha a, \alpha b) + (\beta c, \beta d) = (\alpha a + \beta c + 1, \alpha b + \beta d + 1)$ *luego* $(\alpha+\beta)x \neq \alpha x + \beta x$

9. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

10. $1 \cdot x = x$

Ejemplo 7.11

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} = M_{2\times 2}(R)$$

con las operaciones usuales, es decir, si $x, y \in V$, *entonces*

$$x + y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+m & b+n \\ c+p & d+q \end{pmatrix}$$

y

$$\alpha x = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

es un espacio vectorial, pues sabemos que las matrices con esta suma y este producto cumplen las 10 propiedades siguientes:

1. *Si* $x, y \in V$, *entonces* $x + y \in V$, *pues la suma de matrices de* 2×2 *es una matriz de* 2×2

2. $x + y = y + x$; *la suma de matrices es conmutativa*

3. $(x + y) + z = x + (y + z)$ *la suma de matrices es asociativa*

4. $x + y = y + x = x$; *y es la matriz nula de* 2×2

5. $x + y = y + x = 0$; *donde* $y = -x$

6. $\alpha x \in V \Longleftrightarrow \alpha x = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} \in V$

7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

8. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

9. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

10. $1 \cdot x = x$

Ejemplo 7.12

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a, b, c, d \in Z \right\} = M_{2\times 2}(R)$$

con las operaciones usuales, es decir, si $x, y \in V$, *entonces*

$$x + y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+m & b+n \\ c+p & d+q \end{pmatrix}$$

y

$$\alpha x = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

no es un espacio vectorial Real, pues no se cumple por ejemplo la propiedad $\alpha x \in V$, ya que si $\alpha = \sqrt{2}$y $x = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ entonces $\alpha x = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{pmatrix} \notin V$, pues sus elementos no son enteros.

Ejemplo 7.13

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / b, c, d \in R, a \in Z \right\} = M_{2\times 2}(R)$$

con las operaciones definidas como

$$x + y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+m & b+n \\ c+p & d+q \end{pmatrix}$$

y

$$\alpha x = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no es un espacio vectorial Real, pues no se cumple por ejemplo la propiedad $1 \cdot x = x$, ya que si por ejemplo $x = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \pi & e \end{pmatrix}$ $\quad 1 \cdot x = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \pi & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \pi & e \end{pmatrix}$

Ejemplo 7.14 *V es el conjunto de las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$*
$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ *es un espacio vectorial real, pues*

1. *Sean $x, y \in V \Longrightarrow x + y \in V$; la suma de funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función $(f + g) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que está en V*

2. $x + y = y + x$

   $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$, *luego* $f + g = g + f$ *(observe que* $f(x), g(x)$ *son números reales)*

3. $x, y, z \in V$ *entonces* $(x+y)+z = x+(y+z) \Longleftrightarrow [(f+g)+h](x) = (f+g)(x)+h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x)$

   $[(f + g) + h](x) = (f)(x) + (g + h)(x) = f(x) + [g(x) + h(x)]$ *y como* $f(x), g(x), h(x)$ *son números reales se tiene que* $(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + [g(x) + h(x)]$ *, luego* $(f + g) + h = f + (g + h)$

4. $(f + g)(x) = (g + f)(x) = f(x)$ *entonces* $g(x) = 0$, *es la función nula, luego* $f + 0 = 0 + f = f$

5. $(f + g)(x) = (g + f)(x) = 0$, *entonces* $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0$, *entonces* $g(x) = -f(x)$, *por tanto* $f + (-f) = (-f) + f = 0$

6. $\alpha \in \mathbb{R}, f \in V \Longrightarrow (\alpha f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *entonces* $\alpha f \in V$

7. $(\alpha(f + g))(x) = \alpha(f + g)(x) = \alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f + \alpha g)(x)$, *luego* $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$

8. $((\alpha + \beta)f)(x) = (\alpha + \beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f + \beta f)(x)$, *luego* $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$

9. $(\alpha(\beta f))(x) = \alpha(\beta f(x)) = (\alpha\beta)f(x) = ((\alpha\beta)f)(x)$, *luego,* $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$

10. $(1 \cdot f)(x) = f(x)$, *luego* $1 \cdot f = f$

Ejemplo 7.15 $V = \{P_n(x)/P_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n; a_i \in \mathbb{R}, P_n(x)\ \}$ *polinomios de grado menor o igual que n, donde:*

$p(x) + q(x) = (a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + ... + b_nx^n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_n + b_n)x^n$ *y* $\alpha p(x) = \alpha(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) = \alpha a_0 + \alpha a_1x + ... + \alpha a_nx^n$ *es un espacio vectorial. (Ejercicio)*

Ahora si se tiene un subconjunto W no vacio de un espacio vectorial V y se quiere probar si W es espacio vectorial o no, esto se hará con el presente concepto que es bien sencillo.

7.1 Subespacios

Un subconjunto $W \neq \Phi$ de un espacio vectorial se denomina un subespacio de V, si W es un espacio vectorial bajo las operaciones $(+, \cdot)$ definidas en V.
Para demostrar que W es un espacio vectorial , hay que demostrar las diez propiedades, pero como W es un subconjunto de un espacio vectorial, hay propiedades que son válidas, por ejemplo

- $x + y = y + x$ válida en V, luego es válida en W
- $(x + y) + z = x + (y + z)$ válida en V, luego es válida en W
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ válida en V, luego es válida en W
- $(\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x$ válida en V, luego es válida en W
- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ válida en V, luego es válida en W
- $1.x = x$ válida en V, luego es válida en W

Luego hay que probar:

1. Si W es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V, entonces W es un subespacio de V sí y sólo sí:

   (a) Si $x, y \in W \Longrightarrow x + y \in W$

   (b) Si $\alpha \in \mathbb{R}, x \in W \Longrightarrow \alpha.x \in W$

   Prueba. Si W es un subespacio de V $\Longrightarrow W$ cumple las diez propiedades y en particular cumple que si $\alpha \in \mathbb{R}, x \in W \Longrightarrow \alpha.x \in W$ y si $x, y \in W \Longrightarrow x + y \in W$.Supongamos que $\alpha x \in W$ y $x + y \in W$. Si $\alpha = 0$; $0x = 0 \in W$, y si $\alpha = -1$, entonces $-x \in W$, y los demás propiedades se cumplen, luego W es un espacio vectorial. ■

Ejemplo 7.16 *$V = \mathbb{R}$, con operaciones usuales; W el conjunto de los enteros pares, W no es un subespacio de V, pues $\alpha = \sqrt{2}$, $4\sqrt{2} \notin W$, pues $4\sqrt{2}$ no es un entero par*

Ejemplo 7.17 *$V = \mathbb{R}$, con operaciones usuales; $W = Q$, no es un espacio vectorial, ya que $\frac{2}{3} \in W$, y $\alpha = \sqrt{2}$, entonces $\frac{2}{3}\sqrt{2} \notin W$ pues $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ no es un racional*

Ejemplo 7.18 *$V = \mathbb{R}$, con operaciones usuales; $W = N$, no es un espacio vectorial, ya que $3 \in W$, y $\alpha = \sqrt{2}$,entonces $3\sqrt{2} \notin W$ pues $3\sqrt{2}$ no es un número natural.*

Ejemplo 7.19 $V=\mathbb{R}$, *con operaciones usuales;* $W=Z$, *no es un espacio vectorial, ya que* $3\in W$, *y* $\alpha=\sqrt{2}$,*entonces* $3\sqrt{2}\notin W$ *pues* $3\sqrt{2}$ *no es un número entero*

Ejemplo 7.20 $V=\mathbb{R}$, *con operaciones usuales;* W *los números primos, no es un espacio vectorial, ya que* $3\in W$, *y* $\alpha=\sqrt{2}$,*entonces* $3\sqrt{2}\notin W$ *pues* $3\sqrt{2}$ *no es un número primo*

Ejemplo 7.21 $V=\mathbb{R}^2$,*operaciones usuales.* $W=\{(x,x)/x\in\mathbb{R}\}$ *es un subespacio de V, pues si* $x,y\in W\Longrightarrow x+y=(a,a)+(b,b)=(a+b,a+b)\in W$ *y si* $\alpha\in\mathbb{R}$ *entonces* $\alpha x=\alpha(a,a)=(\alpha a,\alpha a)\in W$ *por tanto* W *es un espacio vectorial*

Ejemplo 7.22 $V=\mathbb{R}^2$,*operaciones usuales.* $W=\{(x,y)/y=x\}=\{(x,x)/x\in Z\}$ *no es un subespacio de V, pues si* $x,y\in W\Longrightarrow x+y=(a,a)+(b,b)=(a+b,a+b)\in W$ *y si* $\alpha\in\mathbb{R}$ *entonces* $\alpha x=\alpha(a,a)=(\alpha a,\alpha a)\notin W$, *tomar* $\alpha=\sqrt{2}$

Ejemplo 7.23 $V=\mathbb{R}^2$, *operaciones usuales,* $W=\{(x,y)/y=x+1\}$ *no es un subespacio de V, pues si* $x,y\in W\Longrightarrow x+y=(a,a+1)+(b,b+1)=(a+b,a+b+2)\notin W$.

Ejemplo 7.24 $V=\mathbb{R}^2$, *operaciones usuales,* $W=\{(x,y)/y=x^2\}$ *no es un subespacio de V, pues si* $x,y\in W\Longrightarrow x+y=(a,a^2)+(b,b^2)=(a+b,a^2+b^2)\notin W$. *pues* $(a+b,a^2+b^2)\neq(a+b,(a+b)^2)$

Ejemplo 7.25 $W=\{(x,y)/y=\sin x\}$ *no es un subespacio de V, pues si* $x,y\in W\Longrightarrow x+y=(a,\sin a)+(b,\sin b)=(a+b,\sin a+\sin b)\notin W$. *pues* $(a+b,\sin a+\sin b)\neq(a+b,\sin(a+b))$

Ejemplo 7.26 $V=\mathbb{R}^2$,*operaciones usuales.* $W=\{(x,1)/x\in R\}$ *no es un subespacio de V, pues si* $x,y\in W\Longrightarrow x+y=(a,1)+(b,1)=(a+b,2)\notin W$

Ejemplo 7.27 $V=\mathbb{R}^3$,*operaciones usuales,* $W=\{(a,b,c)/b=0,a,c\in\mathbb{R}\}$ *es un subespcio de* V *pues* $x,y\in W$

$\Longrightarrow x+y=(a,0,c)+(c,0,d)=(a+c,0,c+d)\in W$ *y* $\alpha x=\alpha(a,0,c)=(\alpha a,0,\alpha c)\in W$.

Ejemplo 7.28 $V=\mathbb{R}^3$, $W=\{(a,b,c)/a^2+b^2+c^2\leq 1\}$, *W no es un subespacio de V, pues* $x,y\in W\Longrightarrow$ *si* $x=(1,0,0),y=(0,1,0)$ *entonces* $x+y=(1,0,0)+(0,1,0)=(1,1,0)$ *y* $1^2+1^2+0^2=2\geq 1$ *y debe ser* ≤ 1

$\Longrightarrow x+y$ *no pertenece a* W

Ejemplo 7.29 $V=\mathbb{R}^4$, *operaciones usuales,* $W=\{(a,b,c,d)/a,b,c,d$ *son racionales*$\}$, *no es un subespacio de* V *pues si* $\alpha=\sqrt{2}\Longrightarrow\alpha x=(a\sqrt{2},b\sqrt{2},c\sqrt{2},d\sqrt{2})\notin W$.

Ejemplo 7.30

$$W = \left\{ A_{2\times 2} \mid A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 0 & b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

no es subespacio de $V = M_{2\times 2}(R)$*; pues si*

$$x, y \in w \Rightarrow x + y = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 2 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c & 4 \\ 0 & b + d \end{bmatrix} \notin w$$

pues en 4 debe ser 2.

Ejemplo 7.31

$$W = \left\{ A_{2\times 2} \mid A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}, c \in Z \right\}$$

no es subespacio de V*; pues si*

$$x, y \in w \Rightarrow x + y = \begin{bmatrix} a & 0 \\ m & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ n & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c & 0 \\ m + n & b + d \end{bmatrix} \in W$$

y

$$\alpha \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & 0 \\ \alpha c & \alpha b \end{bmatrix} \notin W$$

pues $\alpha c \notin Z$ *si* $\alpha = \sqrt{2}$

Ejemplo 7.32 $W = \{A_{2\times 2} \mid A^2 = A\}$ *no es subespacio.*
Si $A \in W, B \in W \Rightarrow (A + B)^2 \neq A + B$*, pues tomo:* $A = I = B; I^2 = I$;
$(I + I)^2 = (2I)^2 = 4I \neq 2I$ *Luego* W *no es espacio vectorial.*

Ejemplo 7.33 $V = M_{2\times 2}(R)$ *operaciones usuales.*

$$W = \left\{ A_{2\times 2} \mid A = \begin{bmatrix} a & a + b \\ a + b & b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subespacio de V*, luego es un espacio vectorial, pues*

$$x + y = \begin{bmatrix} a & a + b \\ a + b & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & c + d \\ c + d & d \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a + c & a + b + c + d \\ a + b + c + d & b + d \end{bmatrix} \in W$$

y si $\alpha \in \mathbb{R}$*,* $x \in w$ *entonces*

$$\alpha x = \alpha \begin{bmatrix} a & a + b \\ a + b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha a + \alpha b \\ \alpha a + \alpha b & \alpha b \end{bmatrix} \in w.$$

Ejemplo 7.34
$$W=\left\{A_{2\times 2}\mid A=\begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix};a,b\in Z\right\}$$
no es subespacio de V*, pues si* $\alpha\in\mathbb{R},x\in W$ *entonces*
$$\alpha x=\alpha\begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha a+\alpha b \\ \alpha a+\alpha b & \alpha b \end{bmatrix}\notin W$$
ya que αa *no es siempre entero, pues* α *puede ser irracional* $\alpha=\sqrt{2}$ *y asi* $\alpha a\notin\mathbb{Z}$*.*

Ejemplo 7.35 $W=\{A_{2\times 2}\mid |A|=0\}$ *no es subespacio de* V*, pues si*
$$x=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ y=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$
entonces
$$x+y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\quad y\quad |x+y|=1\neq 0$$

Ejemplo 7.36 $W=\left\{A\mid A=A^T\right\}$ *es un subespacio de* V*, pues si* $x,y\in W\Rightarrow x=A,y=B\Rightarrow A=A^T,B=B^T$*, luego* $x+y=A+B\in W$*, pues ya que* $(A+B)^T=A+B$ *y si* $\alpha\in\mathbb{R}$*, y* $x\in w\Rightarrow\alpha x=\alpha A\in W$*, pues* $(\alpha A)^T=\alpha A^T=\alpha A$

Ejemplo 7.37 *Sea* $V=\{f:R\to R\}$ *y*
$W=\{f:\mid f(x)=f(1)\}$*, mostrar que* W *es subespacio.*
$f,g\in W$ *entonces* $f(x)=f(1)$ *y* $g(x)=g(1)\Rightarrow(f+g)(x)=f(x)+g(x)=f(1)+g(1)=(f+g)(1)$
$(\alpha f)(x)=\alpha f(x)=\alpha f(1)$

Ejemplo 7.38 $W=\{f\mid f(1)=2+f(0)\}$ *no es un subespacio, pues* $f,g\in W$
$\Rightarrow(f+g)(1)=f(1)+g(1)=2+f(0)+2+g(0)=4+(f+g)(0)\notin W$

Ejemplo 7.39 $W=\{f\mid f(x)\geq 0\}$ *no es un subespacio de* V *pues* $f(x)=x^4\geq 0$
y $\alpha f(x)\notin W$*, pues* $\alpha=-2$*, y* $-2x^4\leq 0$

Ejemplo 7.40 $W=\{f:\mid f(x),es\ par\}$*, es un subespacio pues si.*
$f,g\in W$ *entonces* $(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$ *y*
$(\alpha f)(-x)=\alpha f(-x)=\alpha f(x)$

Ejemplo 7.41 $W=\{f:\mid f(x)<0\}$*, no es un subespacio pues si.*
$f,g\in W$ *entonces* $(f+g)(x)=f(x)+g(x)<0$ *y*
$(\alpha f)(x)=\alpha f(x)=\alpha f(x)>0$ *si* $\alpha<0$ *por tanto esta propiedad no la satisface*

Ejemplo 7.42 $W=\{f:\mid f(x)=f(2+x)\}$*, es un subespacio pues si.*
$f,g\in W$ *entonces* $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=f(2+x)+g(2+x)=(f+g)(2+x)$
y
$(\alpha f)(x)=\alpha f(2+x)=(\alpha f)(2+x)$

7.2 Combinacion Lineal

Sean $v_1, v_2, ..., v_n$ elementos de un espacio vectorial V, es decir, $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Cualquier vector en V de la forma:
$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$,con $a_i \in \mathbb{R}$ se llama combinación lineal de $v_1, v_2, ..., v_n$.

Ejemplo 7.43 $2(1,0) + 3(0,1)$ *es una combinación lineal de* $(1,0)$ *y de* $(0,1)$.

Ejemplo 7.44 $2(1,0,3) + 3(0,1,4) + 5(1,1,1)$ *es una combinación lineal de* $(1,0,3)$, $(0,1,4)$, $(1,1,1)$.

Ejemplo 7.45

$$2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es una combinación lineal de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 7.46 $3[1]+2[1-2x]+3[1+x+x^2]$ *es una combinación lineal de* $(1, 1-2x, 1+x+x^2)$..

Ejemplo 7.47 $3[x] + 2\sin x + 3\cos x$ *es una combinación lineal de* $x, \sin x, \cos x$.

Sea V un espacio vectorial real, $w, v_1, v_2, ..., v_n$ elementos de V, es decir, $w, v_1, v_2, ..., v_n \in V$, el vector w se dice que es una combinacíon lineal de los vectores $v_1, v_2, ..., v_n$, si existen escalares $a_1, a_2, ..., a_n$ tales que $w = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$. Si este sistema no tiene solucion, w no es una combinación lineal, en otro caso si.

Ejemplo 7.48 *El vector* $(3,4)$ *se puede escribir como* $(3,4) = 3(1,0) + 4(0,1)$, *luego* $(3,4)$ *es una combinación lineal de* $(1,0)$ *y* $(0,1)$.

Ejemplo 7.49 *El vector* $(2,4,5)$ *se puede escribir como* $(2,4,5) = 2(1,0,0) + 4(0,1,0) + 5(0,0,1)$, *luego* $(2,4,5)$ *es una combinación lineal de* $(1,0,0)$ *y* $(0,1,0)$ *y* $(0,0,1)$.

Ejemplo 7.50 *El vector* $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *se puede escribir como*

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

luego $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ *es una combinación lineal de*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 7.51 $(9,2,7)$ *es una combinación lineal de* $(1,2,-1)$ *y* $(6,4,2)$ *pues*
$(9,2,7) = x\,(1,2,-1) + y\,(6,4,2) = (x,2x,-x) + (6y,4y,2y) =$
$(x+6y, 2x+4y, -x+2y)$
asi:

$$\begin{aligned} x+6y &= 9 \\ 2x+4y &= 2 \\ -x+2y &= 7 \end{aligned}$$

y la soluciòn de este sistema es $(x,y) = (-3,2)$ *así que* $(9,2,7) = -3\,(1,2,-1) + 2\,(6,4,2)$.

Ejemplo 7.52 $(4,-1,8)$ *no es combinación lineal de* $(1,2,-1)\,;(6,4,2)$
En efecto:

$$\begin{aligned} (4,-1,8) &= x\,(1,2,-1) + y\,(6,4,2) \\ &= (x,2x,-x) + (6y,4y,2y) \\ &= (x+6y, 2x+4y, -x+2y) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} x+6y &= 4 \\ 2x+4y &= -1 \\ -x+2y &= 8 \end{aligned}$$

y este sistema no tiene solución, luego $(4,-1,8)$ *no es una combinación lineal de* $(1,2,-1)\,,(6,4,2)$

pues

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & & 4 \\ 2 & 4 & | & -1 \\ -1 & 2 & & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & & 4 \\ 0 & -8 & | & -9 \\ 0 & 8 & & 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} -8y = -9 \\ 8y = 12 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} y = \frac{9}{8} \\ y = \frac{12}{8} \end{matrix}$$

es absurdo.

Ejemplo 7.53 *Escribir* $w = 3t^2 + 8t - 5$ *como combinación lineal de* $v_1 = 2t^2 + 3t - 4; v_2 = t^2 - 2t - 3$.*En efecto:*

$$\begin{aligned} 3t^2 + 8t - 5 &= a\left(2t^2 + 3t - 4\right) + b\left(t^2 - 2t - 3\right) \\ &= (2a+b)\,t^2 + (3a-2b)\,t + (-4a-3b) \end{aligned}$$

entonces

$$2a+b=3,3a-2b=8,-4a-3b=-5$$

y la solución de este sistema es $a=2$ *y* $b=-1$ *por tanto*

$$3t^2+8t-5=2\left(2t^2+3t-4\right)-1\left(t^2-2t-3\right)$$

Ejemplo 7.54 *Hallar condiciones sobre* a,b,c *tal que* (a,b,c)*sea una combinación linea de* $(1,-3,2)$ *y* $(2,-1,1)$;

En efecto:

$$\begin{aligned}(a,b,c) &= x(1,-3,2)+y(2,-1,1)\\ &= (x,-3x,2x)+(2y,-y,y)\\ &= (x+2y,-3x-y,2x+y)\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{array}{r} x+2y=a\\ -3x-y=b\\ 2x+y=c\end{array} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 2 & & a\\ -3 & -1 & \mid & b\\ 2 & 1 & & c\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & & a\\ 0 & 5 & \mid & 3a+b\\ 0 & -3 & & c-2a\end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & a\\ 0 & -1 & \mid & 2c-a+b\\ 0 & -3 & & c-2a\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & & a\\ 0 & -1 & \mid & 2c-a+b\\ 0 & 0 & & a-3b-5c\end{pmatrix}$$

Luego si $a-3b-5c=0$ *y así el sistema tiene solución.*

7.3 Dependencia e Independencia lineal.

Sea V un espacio vectorial real, se dice que $S=\{v_1,v_2,...,v_n\}\in V$, es linealmente dependiente, si existen escalares $x_1,x_2,...,x_n$ no todos ceros, tales que $x_1v_1+x_2v_2+...+x_nv_n=0$,en caso contrario se dice que los vectores $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ son linealmente independientes.

Ejemplo 7.55 $\{1\}=S,S$ *es linealmente independiente pues* $1.x=0\Rightarrow x=0$;

Ejemplo 7.56 $\{0\}$ *es dependiente pues* $2\times 0=0$ *y* $2\neq 0$.

Ejemplo 7.57 $S=\{(1,1),(2,2)\}$ *es linealmente dependiente pues*

$$\begin{aligned}x(1,1)+y(2,2) &= (0,0)\\ x(1,1)+y(2,2) &= (x,x)+(2y,2y)\\ &= (x+2y,x+2y)=(0,0)\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{array}{l} x+2y=0 \\ x+2y=0 \end{array} \Rightarrow x+2y=0;$$

Luego si $y=-1$ *entonces* $x=2$ *y así* $2(1,1)-1(2,2)=(0,0)$.

Ejemplo 7.58 $S=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *es un conjunto linealmente independiente, pues*

$$\begin{array}{l} x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)= \\ \qquad (x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z)=(x,y,z)=(0,0,0) \end{array}$$

entonces $x=0, y=0, z=0$.

Ejemplo 7.59 *El conjunto* $\{(6,2,3,4),(0,5,-3,1),(0,0,7,-2)\}$ *es linealmente independiente, pues*

$$\begin{array}{r} x(6,2,3,4)+y(0,5,-3,1)+z(0,0,7,-2)= \\ (6x,2x,3x,4x)+(0,5y,-3y,y)+(0,0,7z,-2z)= \\ (6x,2x+5y,3x-3y+7z,4x+y-2z)=(0,0,0,0) \end{array}$$

Luego

$$\begin{array}{l} 6x=0 \\ 2x+5y=0 \\ 3x-3y+7z=0 \\ 4x+y-2z=0 \end{array} \rightarrow x=0; y=0; z=0$$

es la solución del sistema.

Ejemplo 7.60 *El conjunto* $\{(1,-1,0),(1,3,-1),(5,3,-2)\}$ *es linealmente dependiente.*

$$\begin{array}{r} x(1,-1,0)+y(1,3,-1)+z(5,3,-2)= \\ (x,-x,0),(y,3y,-y),(5z,3z,-2z)= \\ (x+y+5z,-x+3y+3z,-y-2z)=(0,0,0) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} x+y+5z=0 \\ -x+3y+3z=0 \\ -y-2z=0 \end{array}$$

y la solución es $(x,y,z)=(3,2,-1)$ *y así*

$$3(1,-1,0)+2(1,3,-1)-1(5,3,-2)=(0,0,0)$$

y $3\neq 0$.

Ejemplo 7.61

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

es linealmente independiente pues:

$$a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

entonces $a=0=b=c=d$.

Ejemplo 7.62

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$$

es linealmente independiente pues

$$x\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x=0.$$

Ejemplo 7.63

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\right\}$$

es linealmente dependiente pues

$$x\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y&x+2y\\x+2y&x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$x+2y=0\Rightarrow y=-1;x=2\neq 0.$$

Ejemplo 7.64 $s=\{1,x,x^2\}$ *es linealmente independiente* $a+bx+cx^2=0$ *para todo* x.

Si $x=0\Rightarrow a=0$; *si* $x=1; a+b+c=0$ *si* $x=-1; a-b+c=0$, *luego como* $a=0\Rightarrow b+c=0$ *y* $-b+c=0$ *y de aqui* $b=c=0$, *es decir, la solución del sistema:*

$$\begin{aligned}&a=0\\&a+b+c=0\\&a-b+c=0\end{aligned}$$

$a=b=c=0$

Ejemplo 7.65 $S = \{x, \sin x, \cos x\}$ *es linealmente independiente pues* $ax + b\sin x + c\cos x = 0\ \forall x \Rightarrow$

1) $x = 0 : c = 0$

2) $x = \pi : a\pi + b\sin\pi + c\cos\pi = 0 \Rightarrow a = 0, c = 0.$

3) $x = \frac{\pi}{2} : a\frac{\pi}{2} + b\sin\frac{\pi}{2} + c\cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow b = 0.$

Ejemplo 7.66 $S = \left\{\sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x\right\}$ *es linealmente dependiente, pues* $1\sin^2 x + 1\cos^2 x - 1\cos 2x = 0$ *y* $1 \neq 0$.

Observe que los 2 ejemplos anteriores son complejos de entender y de hacer y para facilitar este trabajo se aprendera el concepto siguiente

7.3.1 Wronskiano

Si las funciones $f(x), g(x), h(x)$ son derivables 2 veces en $\mathbb{R}$ y si

$$W(f(x), g(x), h(x)) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix} = 0$$

para todo x en $\mathbb{R} \Rightarrow \{f(x), g(x), h(x)\}$ son linealmente dependientes y en caso contrario independientes.

Ejemplo 7.67 $W(1, x) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$ *luego el conjunto* $\{1, x\}$ *es linealmente independientes.*

Ejemplo 7.68 $W(e^x, 2e^x) = \begin{vmatrix} e^x & 2e^x \\ e^x & 2e^x \end{vmatrix} = 0\ \forall x$ *entonces el conjunto* $\{e^x, 2e^x\}$ *es linealmente dependiente.*

Ejemplo 7.69

$$W(x, \sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} x & \sin x & \cos x \\ 1 & \cos x & -senx \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= x\begin{vmatrix} \cos x & -senx \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} - \sin x\begin{vmatrix} 1 & -senx \\ 0 & -\cos x \end{vmatrix} + \cos x\begin{vmatrix} 1 & \cos x \\ 0 & -\sin x \end{vmatrix} =$$

$$= x(-1) - \sin x(-\cos x) + \cos x(-\sin x) = -x$$

no es cero para todo x *entonces el conjunto* $\{x, \sin x, \cos x\}$ *es linealmente independiente.*

7.3.2 Algunas propiedades:

1. Si 0 es uno de los vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ entonces $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente dependiente, pues si por ejemplo $v_2 = 0$ entonces $x_1v_1 + 1.v_2 + x_3v_3 + ... + x_nv_n = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 + ... + 0v_n = 0$ y $1 \neq 0$ coeficiente de v_2

Ejemplo 7.70 *El conjunto* $\{(1,1)\,(0,0)\}$ *es linealmente dependiente*

Ejemplo 7.71 *El conjunto* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ *es linealmente dependiente*

Ejemplo 7.72 *El conjunto* $\{x, \sin x, 0\}$ *es linealmente dependiente*

Ejemplo 7.73 *El conjunto* $\{1, x + x^2, 0\}$ *es linealmente dependiente*

Ejemplo 7.74 *El conjunto* $\{(1,1,1), (2,3,4), (0,0,1), (0,0,0)\}$ *es linealmente dependiente.*

2. El conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente dependiente sisi uno de ellos es combinación de los demás.
Supongamos que v_2 es combinación lineal de los demás, es decir, $v_2 = x_1v_1 + x_3v_3 + ... + x_nv_n \Rightarrow$ Sumando $-v_2$ a la igualdad obtenemos $0 = x_1v_1 - v_2 + x_3v_3 + ... + x_nv_n$ y el coeficiente de v_2 no es cero. Ahora suponga que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente dependiente entonces $x_1v_1 + x_3v_3 + ... + x_nv_n = 0$ y que por ejemplo el coeficiente de v_2 es diferente de cero, entonces

$$x_2v_2 = -x_1v_1 ... - x_nv_n$$

entonces

$$v_2 = -\frac{x_1}{x_2}v_1 ... - \frac{x_n}{x_2}v_n$$

Ejemplo 7.75 *El conjunto* $\{(1,1), (2,2), (1,0), (0,1)\}$ *es linealmente dependiente pues* $(1,1) = 0\,(2,2) + (1,0) + (0,1)$ *(uno de sus elementos es combinación de los demás)*

Ejemplo 7.76 *El conjunto* $\left\{\sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x\right\}$ *es linealmente dependiente pues* $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$.*(uno de sus elementos es combinación de los demás)*

Ejemplo 7.77 *El conjunto* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ *es linealmente dependiente pues* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *(uno de sus elementos es combinación de los demás.)*

Ejemplo 7.78 *El conjunto* $\{1 - x, 2 - 2x, 1 + x + x^2\}$ *es linealmente dependiente pues* $1 - x = \frac{1}{2}(2 - 2x) + 0(1 + x + x^2)$ *(uno de sus elementos es combinación de los demás)*

Ejemplo 7.79 *El conjunto* $\{1, 4\}$ *es linealmente dependientes pues* $4 = 1.4$ *(uno de sus elementos es combinación de los demás)*

3. El conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente independiente sisi todo subconjunto no vacio es linealmente independiente.

Sea $S = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ un subconjunto de $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ .Si S fuera de dependiente, existen escalares no todos nulos $x_1, x_2, ..., x_r$ tal que
$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_rv_r = 0 = x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_rv_r + 0v_{r+1} + ... + 0v_n = 0$
y algún $x_i \neq 0$ entonces $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ seria dependiente (absurdo).

Ejemplo 7.80

$$S = \{(1, 0, 0, 0)\}\,; S_2 = \{(1, 0, 0, 0)\,; (0, 1, 0, 0)\}\,;$$

$$S_3 = \{(1, 0, 0, 0)\,; (0, 1, 0, 0)\,; (0, 0, 1, 0)\}$$

son linealmente independientes, pues son subconjuntos de $\{(1, 0, 0, 0)\,; (0, 1, 0, 0)\,; (0, 0, 1, 0)\,; (0, 0, 0, 1)\}$ *que es un conjunto linealmente independiente.*

Ejemplo 7.81

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

son linealmente independientes, pues son subconjuntos de

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

que es un conjunto linealmente independiente.

Ejemplo 7.82 $S = \{x\}, S_1 = \{\sin x\}, S_2 = \{\sin x, \cos x\}$ *son linealmente independientes, pues son subconjuntos de* $\{x, \sin x, \cos x\}$ *que es un conjunto linealmente independiente.*

4. Si $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente dependiente entonces $\{v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}\}$ es linealmente dependiente.

Ejemplo 7.83 $S = \{(1,2,1), (2,4,2)\}$ *es linealmente dependiente entonces,*$\{(1,2,1), (2,4,2), (1,0,0)\}$ *es linealmente dependiente.*

Ejemplo 7.84 $S = \{1,2\}$ *es linealmente dependiente entonces* $\{1,2,4\}$*es linealmente dependiente*

Ejemplo 7.85

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es linealmente dependiente entonces

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es linealmente dependiente

5. Todo conjunto que contiene un subconjunto linealmente dependiente es linealmente dependiente.

Ejemplo 7.86 *El conjunto* $\{(1,1), (2,2), (1,0), (0,1)\}$ *es linealmente dependiente ya que* $\{(1,1), (2,2)\}$ *es linealmente dependiente.*

Ejemplo 7.87 *El conjunto*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es linealmente dependiente ya que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es linealmente dependiente.

7.4 Generador:

Sea S un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V, S no necesariamente es un subespacio de V, el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores en S, denotado por $L(S) = \{w \mid w \text{ es combinación lineal de vectores de } S\}$ es un subespacio de V.

En efecto : Sea $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \in V$,entonces

$$L(S) = \{w \mid w = x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n, x_i \in \mathbb{R}\}$$

y sean $X, Y \in L(S)$ entonces

$$X = x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n$$

y

$$Y = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$$

luego

$$\begin{aligned} X + Y &= (x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n) + (a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n) \\ &= (x_1 + a_1)v_1 + (x_2 + a_2)v_2 + ... + (x_n + a_n)v_n \\ &= b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n \in L(s) \end{aligned}$$

si $\alpha \in R$ y X$\in L(S)$ entonces $\alpha X = (\alpha x_1)v_1 + (\alpha x_2)v_2 + ... + (\alpha x_n)v_n \in L(S)$
Luego $L(S)$ es un subespacio de V.

Definición 3 *Se dice que* $v_1, v_2, ..., v_n \in W$, *genera a* W , *si cualquier elemento de* W *se puede escribir como una combinación lineal de* $v_1, v_2, ..., v_n$.

Ejemplo 7.88 $w = \{1\}$ *genera a* $\mathbb{R}$, *pues si* $a \in \mathbb{R}$ *entonces* $a = x.1$, *con* $x \in \mathbb{R}$ *y* $L(1) = R$.

Ejemplo 7.89 $w = \{5\}$ *genera a* $\mathbb{R}$, *pues si* $a \in \mathbb{R}$ *entonces* $a = x.5$, *con* $x \in \mathbb{R}$ *y* $L(5) = R$.

Ejemplo 7.90 *Si* $w = \{a\}, a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}, w$ *genera a* $\mathbb{R}$, *pues si* $b \in \mathbb{R}$ *entonces* $b = x.a$; $x \in \mathbb{R}$ *y* $L(a) = \mathbb{R}$.

Ejemplo 7.91 $w = \{0\}$ *no genera a* $\mathbb{R}$,*pues por ejemplo 5 no se puede escribir como combinación lineal de cero, ya que* $5 \neq x.0$, *para* $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 7.92 $w = \{(1,0), (0,1)\}$ *genera a* $\mathbb{R}^2$, *pues si* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *entonces* $(x,y) = a(1,0) + b(0,1)$, *siendo* $a = x, b = y$; *es decir* $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$, *pues* $a(1,0) + b(0,1) = (a,0) + (0,b) = (a,b) = (x,y)$ *sisi* $x = a$ *y* $y = b$ *y así* $L((1,0),(0,1)) = \mathbb{R}^2$.

Ejemplo 7.93 $w = \{(1,1), (2,-1)\}$ *genera a* $\mathbb{R}^2$, *pues si* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *entonces*

$$\begin{aligned}(x,y) &= a(1,1) + b(2,-1)\\ &= (a,a) + (2b,-b)\\ &= (a+2b, a-b)\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}a + 2b &= x\\ a - b &= y\end{aligned}$$

y

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & x\\ 1 & -1 & y\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & x\\ 0 & -3 & y-x\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & x\\ 0 & 1 & \frac{x-y}{3}\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & \frac{2y+x}{3}\\ 0 & 1 & \frac{x-y}{3}\end{array}\right) \text{ y con } \begin{array}{c}a = \frac{2y+x}{3}\\ b = \frac{x-y}{3}\end{array} \text{ entonces } (x,y) = \left(\tfrac{2y+x}{3}\right)(1,1) + \left(\tfrac{x-y}{3}\right)(2,-1)$$

Ejemplo 7.94 $w = \{(1,0), (0,1), (1,1), (-1,1)\}$ *genera a* $\mathbb{R}^2$,*ya que si* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *entonces*

$$\begin{aligned}(x,y) &= a(1,0) + b(0,1) + c(1,1) + d(-1,1)\\ &= x(1,0) + y(0,1) + 0(1,1) + 0(-1,1)\end{aligned}$$

pues $(a,0) + (0,b) + (c,c) + (-d,d) = (a+c-d, b+c+d)$, *así*

$$\begin{aligned}a + c - d &= x\\ b + c + d &= y\end{aligned}$$

luego

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 1 & -1 & x\\ 0 & 1 & 1 & 1 & y\end{array}\right)$$

entonces

$$\begin{aligned}a + c - d &= x\\ b + c + d &= y\end{aligned}$$

y si $d = 0; c = 0$, entonces $b = y$ y $a = x$.

Ejemplo 7.95 $w = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *genera a* $\mathbb{R}^3$, *pues* $(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$ *y en general* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *genera a* $\mathbb{R}^n$, *pues* $(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$.

Ejemplo 7.96 $w = \{(1,1)\}$ *no genera a* $\mathbb{R}^2$, *pues*
$L(1,1) = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$
y por ejemplo $(2,3) = x(1,1) = (x,x)$ *entonces* $x = 2$ *y* $x = 3$ *absurdo; ya que,*
$L\{(1,1), (2,2)\} = L(1,1) = \{(x,y) \mid x = y\}$

Ejemplo 7.97 $w = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$ *no genera a* $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 7.98 $w = \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$

genera las matrices $M_{2\times3}(R)$, pues si $A \in M_{2\times3}(R)$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+u \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ya que

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

entonces $a = x, b = y, c = z, d = u, e = v, f = w$.

Nota: Si a w se le agrega mas matrices de 2×3, también lo genera, pero si a w se le quitan matrices no genera a $M_{2\times3}(R)$.

Ejemplo 7.99 *Mostrar que:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

genera a $M_{2\times3}(R)$

$$S = \{1, x, x^2\} \text{ genera a } P_2(x) \text{ pues}$$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \alpha(1) + \beta x + \gamma x^2 \\ &= a(1) + bx + cx^2 \end{aligned}$$

$$\text{entonces } \alpha = c, \beta = b \text{ y } \gamma = a$$

Ejemplo 7.100 $S = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$ *genera a* $P_n(x)$*.*

Ejemplo 7.101 *Observemos que:*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & f \\ c & f & h \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & f & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} =$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

o sea que

$$w = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

genera las matrices simétricas de 3×3 con elementos reales,que es un espacio vectorial.

Ejemplo 7.102 $(a, b, 0) = (a, 0, 0) + (0, b, 0) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0)$ *luego*

$$w = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \text{ es generado por } \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}.$$

Ejemplo 7.103

$$w = \{(0, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\}$$

es generado por $(0, 1, 0)$ *y* $(0, 0, 1)$ *ya que*

$$(0, b, c) = (0, b, 0) + (0, 0, c) = b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$$

luego w *es generado por* $(0,1,0)$, *y por* $(0,0,1)$ *,pero también*

$$(0,b,c) = x(0,1,1) + y(0,-2,1) = (0,x,x) + (0,-2y,y) = (0,x-2y,x+y)$$

entonces

$$\begin{array}{c} x-2y=b \\ x+y=c \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b \\ 1 & 1 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b \\ 0 & 3 & c-b \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$3y = c-b \Rightarrow y = \frac{c-b}{3} \rightarrow x = c - \frac{c}{3} + \frac{b}{3} = \frac{2c+b}{3}$$

luego

$$(0,b,c) = \frac{(2c+b)}{3}(0,1,1) + \frac{(c-b)}{3}(0,-2,1)$$

Ejemplo 7.104

$$w = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

es generado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pues

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.5 Base

Sea V un espacio vectorial real cualquiera y $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \in V$, S es base de V si y solo si:

1. S es linealmente independiente.
2. S genera a V.

El número de elementos de una base es la dimensión de V, denotado por $\dim V$.

Ejemplo 7.105 $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{3\}$ *y* $S_3 = \{7\}$, *son bases de* $\mathbb{R}$, *pues son linealmente independientes y generan a* R *y como el número de elementos de* S_1 *es uno entonces* $\dim \mathbb{R} = 1$; *a la base* $S_1 = \{1\}$ *se le llama base la canónica de* $\mathbb{R}$

Ejemplo 7.106 $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, $S_2 = \{(1,1),(3,5)\}$; $S_3 = \{(1,0),(-3,5)\}$
son bases de $\mathbb{R}^2$*, pues son linealmente independientes y generan a* R^2*, así* $\dim \mathbb{R}^2 = 2 =$*número de elementos de la base. A la base* $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ *se le llama la base canónica de* $\mathbb{R}^2$

Ejemplo 7.107 $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^3$*; luego* $\dim \mathbb{R}^3 = 3$*; cualquier otra base tiene 3 elementos. Observe que*

$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) \text{ es linealmente independiente y genera a } \mathbb{R}^3$$

Ejemplo 7.108 *La soluciòn de* $y'' - y = 0$ *es* $y = ae^x + be^{-x}$ *luego la dimensión del conjunto solución de* $y'' - y = 0$ *es 2 pues* $\{e^x, e^{-x}\}$ *son linealmente independientes y generan el espacio solución.*

Ejemplo 7.109

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es linealmente independiente y genera a $M_{2\times 2}(R)$*, luego* S *es una base de* $M_{2\times 2}(R)$*, luego* $\dim M_{2\times 2}(R) = 4$ *a* S *se llama la base canónica de* $M_{2\times 2}(R)$*. Observe que*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7.110

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es linealmente independiente y genera a $M_{2\times 3}(R)$ y como el número de elementos de S es 6 entonces $\dim M_{2\times 3}(R) = 6$. Observe que

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} =$$

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7.111 *$S = \{1, x, x^2\}$ es linealmente independiente y genera a $P_2(x)$ luego* $\dim P_2(x) = 3$*.A $S = \{1, x, x^2\}$ se le llama la base canónica de $P_2(x)$*

Ejemplo 7.112 *La dimensión de las matrices simétricas de 3×3 es 6. pues*

$$w = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$$

y

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

$$= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} es$$

linealmente independiente y genera a las matrices simétricas de 3×3

Ejemplo 7.113

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es linealmente independiente y genera a

$$w = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

luego S es base de w, así $\dim w = 2$.

Ejemplo 7.114 $S = \{(1,0,0,0);(0,1,0,0);(0,0,1,0)\}$ *es linealmente independiente y genera a* $w = \{(a,b,c,0) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ *entonces* S *es base de* w *y así* $\dim w = 3$.

Ejemplo 7.115 $S = \{(1,0,0);(0,1,1)\}$ *es linealmente independiente y genera a* $W = \{(x,y,z) \mid y = z, x,y \in \mathbb{R}\}$ *y así* $\dim W = 2$.

Ejemplo 7.116 *Sea* $w = \{(x,y,z) \mid x+y+z = 0\}$ *Como* $x+y+z=0$ *entonces* $z = u; y = v; x = -u-v$ *Luego* $w = \{(-u-v,v,u) \mid v,u \in \mathbb{R}\}$ *así*

$$\begin{aligned}(-u-v,v,u) &= (-u,0,u)+(-v,v,0)\\ &= u(-1,0,1)+v(-1,1,0)\end{aligned}$$

luego $(-1,0,1),(-1,1,0)$ *genera a* w *y como* $\{(-1,0,1),(-1,1,0)\}$ *es linealmente independientes entonces* $s = \{(-1,0,1),(-1,1,0)\}$ *es una base de* w, *entonces* $\dim w = 2$.

Ejemplo 7.117 *Una base para el plano* $x = 0$ *es* $s = \{(0,1,0),(0,0,1)\}$ *es linealmente independiente y genera a* w *pues* $w = \{(x,y,z) \mid x = 0, y,z \in \mathbb{R}\} = \{(0,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$ *luego* $(0,y,z) = (0,y,0)+(0,0,z) = y(0,1,0)+z(0,0,1)$

Ejemplo 7.118

$$w = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

luego

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es linealmente independiente y genera a w, las matrices simétricas de 2×2, luego $\dim w = 2$.

Ejemplo 7.119

$$w = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \mid a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix},$$

así

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

genera a w matrices triangulares y s es linealmente independiente entonces $\dim w = 6$.

Ejemplo 7.120 *Hallar una base del espacio solución del sistema:*

$$\begin{matrix} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{matrix} ; \left(\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right) \sim \left(\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right)$$

luego $\begin{matrix} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{matrix}$ *entonces hay 2 variables libres:*

$x_4 = u, x_3 = v, x_2 = 2x_3 + x_4 = 2v + u, x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4 = -4v - 2u + v - u = 5v + u$ *luego* $S_T = \{(5v + u, 2v + u, v, u) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$; $(5v + u, 2v + u, v, u) = (5v, 2v, v, 0) + (u, u, 0, u) = v\,(5, 2, 1, 0) + u\,(1, 1, 0, 1)$ *así* $\dim S_T = 2$ *y una base es* $s = (5, 2, 1, 0)\,, (1, 1, 0, 1)$

7.5.1 Algunas propiedades:

1. Sea V un espacio vectorial y $\dim V = n$ entonces dos bases cualquiera de V, tienen n elementos cada una.

Ejemplo 7.121 $S = \{1\}\,; \{3\} = w$ *son bases de* $\mathbb{R}$, *pero* $w_1 = \{1, 3\}$ *no es base de* $\mathbb{R}$, *pues* w_1 *no es linealmente independiente, aunque* w_1 *genera a* $\mathbb{R}$.

Ejemplo 7.122 $S = \{(1, 0)\,, (0, 1)\}\,; w = \{(1, 1)\,, (3, 5)\}$ *;son bases de* $\mathbb{R}^2$; *pero* $w_1 = \{(1, 0)\,, (0, 1)\,, (1, 1)\}$*no es base de* $\mathbb{R}^2, w_1$ *genera a* $\mathbb{R}^2$, *pero* w_2 *no es linealmente independiente, además los elementos de una base de* $\mathbb{R}^2$, *deben ser 2.*

Ejemplo 7.123 $S = \{(1,0), (0,1)\}$; $s = \{(1,1), (3,5)\}$;*son bases de* $\mathbb{R}^2$; *pero* $s = \{(1,1)\}$ *no es una base de* $\mathbb{R}^2$, *pues debe tener 2 elementos; s es linealmente independiente, pero s no genera a* $\mathbb{R}^2$; $S_1 = \{(1,1), (2,2)\}$ *tiene 2 elementos, pero* S_1 *es linealmente dependiente y además* S_1 *no genera a* $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 7.124

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

no es base de $M_{2\times2}(R)$,*pues debe tener 4 elementos; S es un conjunto linealmente independiente y no genera las matrices* $M_{2\times2}(R)$

Ejemplo 7.125

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

no es base de $M_{2\times2}(R)$, *ya que no es linealmente independiente;*

Ejemplo 7.126

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

no es base de $M_{2\times2}(R)$ *pues no es linealmente independiente y no genera a* $M_{2\times2}(R)$. *Recuerde que una base de* $M_{2\times2}(R)$ *debe tener 4 elementos y debe ser linealmente independiente y generar a* $M_{2\times2}(R)$.

2. Si $\dim V = n$ entonces todo conjunto con más de n elementos es linealmente dependiente.

Ejemplo 7.127 $S = \{(1,1), (0,1), (1,0)\}$ *es linealmente dependiente pues* $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ *y* $2 < 3$.

Ejemplo 7.128 $S = \{1, x, x^2, x^2\}$ *es linealmente dependiente pues* $\dim P_2(x) = 3$, $3 < 4$.

Ejemplo 7.129

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

es linealmente dependiente, pues $\dim M_{2\times2}(R) = 4$ *y* $4 < 6$ *número de elementos de S.*

3. Si V es un espacio vectorial y $\dim V = n$ entonces ningún conjunto con menos de n vectores genera a V.

Ejemplo 7.130 $S = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ *no es base de* $\mathbb{R}^3$; s *no genera a* $\mathbb{R}^3$; $\dim R^3 = 3 > 2$.

Ejemplo 7.131

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

no genera $M_{2\times 2}(R)$ *pues* $2 < 4 = \dim M_{2\times 2}(R)$.

Ejemplo 7.132 $S = \{1, x, x^2\}$ *no genera a* $P_3(x)$, *pues* $\dim P_3(x) = 4 > 3$.

Ejemplo 7.133 $S = \{(1,0)\}$ *no es base de* $\mathbb{R}^2$; S *no genera a* $\mathbb{R}^2$; $\dim R^2 = 2 > 1$

Ejemplo 7.134 $S = \{(1,2)\}$ *no es base de* $\mathbb{R}^2$; S *no genera a* $\mathbb{R}^2$; $\dim R^2 = 2 > 1$

Ejemplo 7.135

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

no genera $M_{2\times 3}(R)$ *pues* $2 < 6 = \dim M_{2\times 3}(R)$

Ejemplo 7.136

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

no genera $M_{2\times 3}(R)$ *pues* $4 < 6 = \dim M_{2\times 3}(R)$

4. Sea V un espacio vectorial $\dim V = n$, entonces si S genera a V, pero no es base de V, se le puede quitar a S vectores para reducir S a una base de V.

Ejemplo 7.137 $S = \{1,3,4\}$ *genera a* $\mathbb{R}$,*pero no es base de* $\mathbb{R}$, *luego a* S *se le pueden quitar 2 elementos por ejemplo* $S_1 = \{1\}$ *o* $S_2 = \{3\}$ *o* $S = \{4\}$ *son bases de* $\mathbb{R}$.

Ejemplo 7.138 $S = \{1,3\}$ *genera a* $\mathbb{R}$,*pero no es base de* $\mathbb{R}$, *luego a* S *se le pueden quitar 1 elementos por ejemplo* $S_1 = \{1\}$ *o* $S_2 = \{3\}$ *son bases de* $\mathbb{R}$.

Ejemplo 7.139 $s = \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ *genera a* $\mathbb{R}^2$, *pero* S *no es base de* $\mathbb{R}^2$, *pero* $s = \{(1,0),(0,1)\}$ *si es base de* $\mathbb{R}^2$, *al quitarle* $\{(1,1)\}$

Ejemplo 7.140 $s = \{1, x, x^2, x^3, 2x^3\}$ *genera a* $P_3(x)$ *y no es base de* $P_3(x)$, *pero* $S_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ *es base de* $P_3(x)$.

Ejemplo 7.141

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

genera a $M_{2\times 2}(R)$, *pero* S *no es base de* $M_{2\times 2}(R)$, *pero*

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

si es base de $M_{2\times 2}(R)$, *al quitarle* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$

5. Si V es un espacio vectorial y $\dim V = n$ entonces cualquier conjunto con n vectores linealmente independiente es base.

Ejemplo 7.142 $s = \{2\}$ *es linealmente independiente y como* $\dim \mathbb{R} = 1$ *entonces* s *es base de* $\mathbb{R}$

Ejemplo 7.143 $s = \{4\}$ *es linealmente independiente y como* $\dim \mathbb{R} = 1$ *entonces* s *es base de* $\mathbb{R}$

Ejemplo 7.144 $s = \{(1,0), (2,3)\}$ *es linealmente independiente y como* $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ *entonces* s *es base de* $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 7.145 $\dim M_{2\times 2}(R) = 4$ *y como*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es linealmente independiente entonces S *es base de* $M_{2\times 2}(R)$.

Ejemplo 7.146 $s = \{1, 2x+1\}$ *es linealmente independiente y como* $dimP_1(x) = 2$ *entonces* $s = \{1, 2x+1\}$ *es base de* $P_1(x)$

6. Sea V un espacio vectorial y $\dim V = n$ entonces si s tiene n vectores y genera a V, s es base de V

Ejemplo 7.147 $\dim \mathbb{R} = 1; s = \{1\}$ *genera a* $\mathbb{R}$ *entonces* s *es base de* $\mathbb{R}$.

Ejemplo 7.148 $\dim \mathbb{R} = 1; s = \{2\}$ *genera a* $\mathbb{R}$ *entonces* s *es base de* $\mathbb{R}$.

Ejemplo 7.149 $\dim \mathbb{R}^2 = 2; s = \{(1,0), (1,1)\}$ *genera a* $\mathbb{R}^2$, *entonces* s *es base de* $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 7.150 $\dim \mathbb{R}^2 = 2; s = \{(1,2), (4,5)\}$ *genera a* $\mathbb{R}^2$, *entonces* s *es base de* $\mathbb{R}^2$

Ejemplo 7.151 $\dim P_3(x) = 4; s = \{1, x, x^2, x^3\}$ *genera a* $P_3(x)$ *entonces* s *es base de* $P_3(x)$.

Ejemplo 7.152 $\dim P_1(x) = 2; s = \{1, x-2\}$ *genera a* $P_1(x)$ *entonces* s *es base de* $P_1(x)$

Ejemplo 7.153 $\dim M_{2\times 2}(R) = 4$ *y como*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

genera a $M_{2\times 2}(R)$ *entonces* S *es base de* $M_{2\times 2}(R)$.

7.6 Suma y suma directa

Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V, entonces:
$S + T = \{A + B \mid A \in S \text{ y } B \in T\}$. $S + T$ es un subespacio de V,pues si $x, y \in S + T$ luego $X = A_1 + B_1; Y = A_2 + B_2$, por tanto
$X + Y = (A_1 + B_1) + (A_2 + B_2) = (A_1 + A_2) + (B_1 + B_2) \in S + T$, pues $A_1 + A_2 \in S$ y $B_1 + B_2 \in T$.
Si $\alpha \in \mathbb{R}$,entonces $\alpha x = \alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B \in S + T$. pues $\alpha A \in S$, S es subespacio, $\alpha B \in T, T$ es subespacio.

Ejemplo 7.154

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

S *y* T *son subespacios de* $M_{2\times 2}(R)$.

$$S+T=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid d,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

$$S\cap T=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a\in\mathbb{R}\right\}$$

Lema 1

Si S y T son subespacios de un espacio vectorial V entonces $S\cap T$ es también un subespacio de V.
En efecto:
Si $X,Y\in S\cap T$ entonces $X\in S\cap T$ y $Y\in S\cap T$
luego $X\in S$ y $X\in T$; $Y\in S$ y $Y\in T$, luego $X+Y\in S$ y $X+Y\in T$ entonces $X+Y\in S\cap T$ $\quad \alpha X\in S$ y $\alpha X\in T\Rightarrow \alpha X\in S\cap T$.Luego $S\cap T$ es un subespacio de V

Ejemplo 7.155 $S=L(1,1)=\{(x,x)\mid x\in\mathbb{R}\}=\{(x,y)\mid y=x\}$;
$T=L(1,0)=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$ *entonces* $S\cap T=\{0\}$ *que es un subespacio de* $\dim\{0\}=0$

Se dice que el espacio vectorial V es suma directa de sus subespacios S y T notada por $V=S\oplus T$ si todo vector $v\in V$ se puede escribir de una sola manera como $v=A+B$ con $A\in S$ y $B\in T$ y esto sucede cuando $V=S+T$ y $S\cap T=\{0\}$, es decir, $V=S\oplus T$ ssi $V=S+T$ y $S\cap T=\{0\}$.

Ejemplo 7.156 $S=\{(a,b,0)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$; $T=\{(0,b,c)\mid b,c\in\mathbb{R}\}$. *observe que* $R^3=S+T$; *pero* $R^3\neq S\oplus T$, *pues* $\begin{matrix}(3,5,7)=(3,1,0)+(0,4,7)\\(3,5,7)=(3,-4,0)+(0,9,7)\end{matrix}$, *es decir,* $(3,5,7)$ *no se puede escribir de una sola forma como un elemento de* S *mas un elemento de* T. *Además* $S\cap T=\{(0,b,0)\mid b\in\mathbb{R}\}\neq\{0\}$.

Ejemplo 7.157 $S=\{(a,b,0)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$; $T=\{(0,0,c)\mid c\in\mathbb{R}\}$ $\mathbb{R}^3=S\oplus T$; *pues cualquier elemento de* $\mathbb{R}^3:(a,b,c)=(a,b,0)+(0,0,c)$ *se puede escribir de manera única como un elemento de* S *más un elemento de* T; *además* $S\cap T=\{0\}$

Ejemplo 7.158 $S=\{(a,a,a)\mid a\in\mathbb{R}\}$; $T=\{(0,b,c)\mid b,c\in\mathbb{R}\}$;

$$\mathbb{R}^3=S\oplus T;\text{pues } \mathbb{R}^3=S+T \text{ y } S\cap T=\{0\}.$$

Ejemplo 7.159 $S = \{(a,b,c) \mid a+b+c=0, a,b,c \in \mathbb{R}\}$; $T = \{(0,0,c) \mid c \in \mathbb{R}\}$ $c = u, b = v, a = -v-u; \mathbb{R}^3 = S \oplus T$; *pues* $\mathbb{R}^3 = S+T$ *y* $S \cap T = \{0\}$; $S = \{(-v-u, v, u) \mid v, u \in \mathbb{R}\}$, $T = \{(0,0,c) \mid c \in \mathbb{R}\}$.

Ejemplo 7.160 $S = \{(a,b,c) \mid a = c\}$; $T = \{(0,0,c) \mid c \in \mathbb{R}\}$; $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$; $\mathbb{R}^3 = S + T$ *y* $S \cap T = \{0\}$.

Ejemplo 7.161 $V = M_{2\times 2}(R) = S+T$ *y* $S \cap T =$ *matrices diagonales, luego* $M_{2\times 2}(R) \neq S \oplus T$

Ejemplo 7.162 $S = L(1,2)$; $T = L(2,1)$; *entonces* $\mathbb{R}^2 = S \oplus T$; *pues* $\mathbb{R}^2 = S + T$; $S \cap T = \{0\}$.

Sean S y T dos subespacios de dimensión finita de un espacio vectorial V entonces $\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$ y si $V = S \oplus T$ entonces $\dim(S+T) = \dim S + \dim T = \dim V = \dim(S \oplus T)$.

Ejemplo 7.163 $S = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$; $T = \{(0,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$ $\mathbb{R}^3 = S+T$; $\dim \mathbb{R}^3 = \dim(S+T) = 2+2-\dim(S \cap T)$, *luego* $3 = 4 - \dim(S \cap T)$ *entonces* $\dim(S \cap T) = 1$.

Ejemplo 7.164

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}, T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim M_{2\times 2}(R) = 4; \dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T); 3 = 2+1-0;$$

$$S+T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}, \dim(S+T) = 3; \dim S = 2y \dim T = 1;$$

$$S \cap T = \{0\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}; \dim(S \cap T) = 0$$

luego $M_{2\times 2}(R) \neq S + T$.

Ejemplo 7.165

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}; T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \mid e,f \in \mathbb{R} \right\}$$

$$dim(M_{2\times 3}(R)) = 6; M_{2\times 3}(R) = S+T; S \cap T = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\}; 6 =$$

$$\dim S + \dim T - \dim(S \cap T) = 4+2-0$$

Ejemplo 7.166 $S = \{p(x) \mid p(x) = cx^2\}$; $T = \{q(x) \mid q(x) = a_0 + bx\}$;
$P_2(x) = a_0 + bx + cx^2$; $P_2(x) = S+T$; $S \cap T = 0$; *luego* $P_2 = S \oplus T$;
$\dim(P_2(x)) = 3 = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T) = 1+2-0$

7.7 EJERCICIOS PROPUESTOS CAPITULO 7

1. Analizar cuales de los conjuntos siguientes son espacios vectoriales.

   (a) $V = (R^2, +, \bullet)$, $(a,b) + (c,d) = (a+c, b)$ y $\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$ Resp no

   (b) $V = (R^2, +, \bullet)$, $(a,b) + (c,d) = (2a+2c, b+d)$ y $\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$ Resp no

   (c) $V = (R^2, +, \bullet)$, $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ y $\alpha(a,b) = (a,b)$ Resp no

   (d) $V = (R^2, +, \bullet)$, $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ y $\alpha(a,b) = (0,0)$ Resp no

   (e) $V = (R^2, +, \bullet)$, $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ y $\alpha(a,b) = (|\alpha a|, |\alpha b|)$ Resp no

   (f) $V = (a_1, a_2, a_3\, a_4, ...)$ con $a_i \in R$
   y $(a_1, a_2, a_3,\ a_4, ...) + (b_1, b_2, b_3\ , b_4, ...) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, ...)$
   $\alpha(a_1, a_2, a_3\, a_4, ...) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3\ , \alpha a_4, ...)$ Resp si

2. Analizar cuales de los conjuntos siguientes son espacios vectoriales, consideralos como subespacio

3. $W = \{(a,b,c)/b = a+c,\ \ a,b,c$ números reales$\}$ Resp si

4. $W = \{(a,b,c)/b = a+c,\ \ a,b,c$ números enteros$\}$ Resp no

5. $W = \{(a,b,c)/a = 0, b = c,\ b,c$ números reales$\}$ Resp si

6. $W = \{(a,b,c)/a = c^2,\ b,c$ números reales$\}$ Resp no

7. $W = \{(a,b,c)/b = a^2 + c^2,\ \ a,b,c$ números reales$\}$ Resp no

8. $W = \{(a,b,c)/c = 0, a^2 + b^2 \leq 1,\ a,b$ números reales$\}$ Resp no

9. $W = \{(a,b,c)/a - 2b = 0, b - c = 0,\ a,b,c$ números reales$\}$ Resp si

10. $W = \{(a,b,c)/a \geq 0,\ \ a,b,c$ números reales$\}$ Resp no

11. $W = \{(a,b,c)/a = b = c,\ \ a,b,c$ números reales$\}$ Resp si

12. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} /a + b = c + d,\ \text{a,b,c,d números reales} \right\}$ Resp si

13. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & b \end{bmatrix} / \text{ a,b números reales} \right\}$ Resp si

14. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & b \end{bmatrix} / \text{ a,b números enteros} \right\}$ Resp no

15. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} / \text{ a es un número entero} \right\}$ Resp no

16. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} / \text{ a es un número real} \right\}$ Resp si

17. $W = \{A/$ es una matriz Antisimétrica con elementos Reales$\}$ Resp si

18. $W = \{A/$ es una matriz diagonal con elementos Reales$\}$ Resp si

19. $W = \{A/$ es una matriz triangular con elementos Reales$\}$ Resp si

20. $W = \{A/$ es una matriz Involutiva $\}$ Resp no

21. $W = \{A/\ AB = 0\ \}$ Resp si

22. $W = \{A/\ AB = BA\ \}$ Resp si

23. $W = \{A/\ AB + BA\ = 0\}$ Resp si

24. $W = \{f/\ f$ es creciente$\}$ Resp no

25. $W = \{f/\ f$ es acotada$\}$ Resp si

26. $W = \{f/\ f$ es derivable$\}$ Resp si

27. $W = \{f/\ f$ es continua$\}$ Resp si

28. $W = \{f/\ f$ es im$par\}$ Resp si

29. $W = \{f/\ f\ (2) = f(3)\}$ Resp si

30. $W = \{f/\ f\ (0) = f(1) + 2\}$ Resp no

31. $W = \left\{f/\ f \text{ es solución de } y'' - y = 0\right\}$ Resp si

32. $W = \{X/$ X es solución de $AX = 0\}$ Resp si

33. $W = \{A/\ traza$ de A $= 0\ \}$ Resp si

34. $W = \{p_2(x) / \ p_2(x) = a + bx + cx^2$ con a,b,c núneros enteros$\}$ Resp no

35. $W = \{f / \ f \ (x) = f(1-x)\}$ Resp si

36. $W = \{f / \ f$ es escalonada$\}$ Resp si

37. $W = \{f / \ f$ es $racional\}$Resp si

II)

1. Mostrar que $w = (1, -2, 5)$ es combinación lineal de $v_1 = (1, 1, 1)\,; v_2 = (1, 2, 3)\,; v_3 = (2, -1, 1)\,.$

2. Mostrar que $w = (2, -2, 5)$ es combinación lineal de $v_1 = (1, -3, 2)\,; v_2 = (2, -4, 1)\,; v_3 = (1, -5, 7)\,.$

3. Mostrar que $w = 3t^2+8t-5$ es combinación lineal de $v_1 = 2t^2+3t-4$; $v_2 = t^2-2t-3$.

4. Es $w = (5, 9, 5)$ combinación lineal de $v_1 = (2, 1, 4)\,; v_2 = (1, -1, 3)\,; v_3 = (3, 2, 5)$? resp si

5. Es $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$? resp no

6. Mostrar que $w = \cos 2x$,se puede escribir como combinación lineal de $v_1 = \cos^2 x$; $v_2 = sen^2 x$.

III) Determinar si los vectores dados son linealmente dependientes o linealmente independientes.

1. $\{(1, 1)\,, (4, 4)\,, (5, 3)\}$ ld

2. $\{(3, 5)\,, (1, 3)\,, (0, 0)\}$ ld

3. $\{(2, 4)\}$ li

4. $\{(1, 2, 3, 4)\,, (1, 0, 0, 0)\,, (0, 1, 0, 0)\}$ li

5. $\{(1, 1, 1)\,, (2, 2, 2)\,, (0, 0, 1)\}$ ld

6. $\{(1, 2, 3)\,, (1, 0, 0)\}$ li

7. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ li

8. $\{1-x, 1+3x^2, -x+x^2\}$ li

9. $\{1+x+x^2, 2+2x+2x^2, 1-3x-5x^2\}$ ld

10. $\{2-x+4x^2, 3+6x+2x^2, 2+10x-4x^2\}$ li

11. $\{t^3-3t^2+5t+1, t^3-t^2+8t+2, 2t^3-4t^2+9t+5\}$ li

12. $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$ li

13. $\{1, x, x^2\}$ li

14. $\{1, \sin x, \cos x\}$ li

15. $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ li

16. $\{e^x \sin x, e^x \cos x\}$ li

17. $\{e^x, e^{-x}, \cosh x\}$ ld

18. Para que valores de k los siguientes vectores forman un conjunto linealmente dependiente en $\mathbb{R}^3$:
$\left(k, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right), \left(\frac{-1}{2}, k, \frac{-1}{2}\right), \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, k\right)$ Resp $k = \frac{-1}{2}, 1$

19. Suponga que v_1, v_2 y v_3 son vectores en $\mathbb{R}^3$ que tienen sus puntos iniciales en el origen. Determine si los tres vectores pertenecen a un mismo plano:

    (a) $v_1 = (1, 0, 2) \qquad v_2 = (3, 1, 2) \qquad v_3 = (1, -1, 0)$ resp no

    (b) $v_1 = (2, -1, 4) \qquad v_2 = (4, 2, 3) \qquad v3 = (2, 7, -6)$ resp si

IV) Cuales de los conjuntos dados son bases.

20. $\{(1,1,1), (0,1,1), (0,-1,1)\}$ base

21. $\{(1,0), (1,1), (1,3), (2,4)\}$ no

22. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base

23. $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ base

24. $\{1, x, 1-x^2, x^2\}$

25. $\{e^x, xe^x\}$

26. $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

27. $\{1-t+t^2-t^3, 1-t^3, 1+t-t^3\}$

28. Cuales de los siguientes subconjuntos forman una base de $\mathbb{R}^3$?

    (a) $\{(1,1,1), (1,2,3), (0,1,0)\}$
    (b) $\{(2,1,3), (1,2,1), (1,1,4), (1,5,1)\}$ no
    (c) $\{(1,2,2), (2,1,3), (0,0,0)\}$ no

29. Hallar una base y la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por:

    (a) $\{(1,4,-1,3), (2,1,-3,1), (0,2,1,-5)\}$
    (b) $\{(1,-4,-2,1), (1,-3,-1,2), (3,-8,-2,7)\}$

30. Sea $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y sea W el subespacio generado por:
    $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\right\}$
    Hallar una base y la dimension de W.

31. Hallar una base de $\mathbb{R}^3$ que incluya los vectores $(1,0,2)$ $(0,1,3)$

32. Hallar una base del espacio solucion W del sistema homogeneo:

    (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

    (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

    En a y b cual es la dimension de W?

33. Hallar una base del espacio solucion W del sistema:

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 6y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & - & 9y & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

¿Cual es la dimension de W?

34. Determinar si las quíntuplas: $(4,-3,1,1,1)$, $(9,0,3,0,3)$, $(8,0,2,-2,0)$ y $(6,-1,1,-1,0)$ pertenecen al espacio solución del sistema:

$$\begin{array}{cccccccccc} x & + & 2y & - & 2z & + & 2u & - & v & =0 \\ x & + & 2y & - & 2z & + & 3u & - & 2v & =0 \\ 2x & + & 4y & - & 7z & + & u & + & v & =0 \end{array}$$

Dar una base y la dimensión de dicho espacio.

35. Calcule la dimensión de los siguientes subespacios de $V = M_{3\times 3}(R)$:

    (a) Las matrices simétricas

    (b) Las matrices antisimétricas

    (c) Las matrices diagonales

    (d) Las matrices triangulares

36. Hallar una base para cada una de los subespacios del ejercicio anterior.

37. Sea U el espacio vectorial de las matrices reales 2x3. S_1 y S_2 los siguientes subespacios de U :

$$S_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ w & 0 & w \end{pmatrix} / \qquad w = x + y \right\}$$

$$S_2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & w \end{pmatrix} / \qquad x = y, \qquad w + y = 0 \right\}$$

Hallar una base para S_1 , S_2 y $\dim S1$ y S_2

38. Calcular la dimensión de los siguientes subespacios de $V = M_{n\times n}(R)$:

39. Determinar la dimension de cada uno de siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

    (a) $U = \{(x,y,z,0)\}$

    (b) $U = \{(x,y,z,w)/w = x + y; z = x - y\}$

    (c) $U = \{(x,y,z,w)/x = y = z = w\}$

40. Sea $\{u, v, w\}$ una base de un espacio vectorial V, verificar si el conjunto dado es base de V o nó:

    (a) $\{u + 2w, v + w, u + v + w\}$

    (b) $\{u, u + v, u + v + w\}$

    (c) $\{u + v, v + w, u - v + 4w\}$

41. Determine la dimension y construya una base para cada uno de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

    (a) $U = \{a, b, c, 0\}$

    (b) $U = \{(a, b, c, d) / d = a + b, c = a - b\}$

    V) Dar una base diferente a la canónica para los espacios vectoriales.

42. $M_{3\times4}(R)$

43. R^4

44. $P_3(x)$

45. El plano $z = 0$.

46. $M_{2\times4}(R)$

47. las matrices diagonales de $M_{3\times3}(R)$

VI) Hallar una base y la dimensión de los siguientes espacios vectoriales.

1. $w = \{(a, b, c, d) \mid a = b = c = d; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$
2. $w = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$
3. $w = \{A_{3\times3} \mid A \text{ es una matriz escalar}\}$
4. $w = \{A_{3\times3} \mid A \text{ es una matriz antisimétrica}\}$
5. $w = \{A_{3\times3} \mid A \text{ es una matriz triangular superior}\}$
6. $w = \{A_{3\times3} \mid traza(A) = 0\}$

7. $w =$ *plano* $x = y$

8. $w =$ *plano* yz

9. $w =$ espacio solución de $y'' - 5y' + 6y = 0$

10. w el espacio solución de:

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 0 \\ x + 5y + z &= 0 \\ 3x + 5y + 8z &= 0 \end{aligned}$$

11. w el espacio solución de:

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ y - z + 3w &= 0 \end{aligned}$$

12. El subespacio de $\mathbb{R}^4$ de todos los vectores de la forma:
    (x, y, z, w) donde $x = z + w, \qquad y = w - z$

13. El subespacio de $\mathbb{R}^3$ que consta de todos los vectores de plano:
    $2x + 5y - 4z = 0$

14. El espacio solucion del sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 0 \\ x - y + z - t &= 0 \end{aligned}$$

15. El subespacio de $\mathbb{R}^3$ que consta de todos los vectores de la recta:
    (a) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$
    (b) $x = 2t, y = t, z = -3t$ con t real.

    VII)

16. Si u, v, w son vectores linealmente independientes entonces demostrar que
    $\{u + v - 2w, u - v - w, u + w\}$ es linealmente independiente.
    VIII)

17. Demostrar que $S = \{1 + x^3, 2 - x, x + x^2 + x^3, 1 + x + x^2 + x^3\}$ es base de $P_3(x)$.

18. Demuestre que es linealmente independiente o que genera a P_3.

IX) De un ejemplo de:

(a) Subespacio de $M_{2\times 2}(R)$ que tenga dimensión 1.
(b) Subespacio de R^4 que tenga dimensión 2.
(c) Subespacio de $M_{3\times 2}(R)$ que tenga dimensión 3.

X)

(a) $S = \{(a, b, c, 0) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}; T = \{(0, 0, 0, d) \mid d \in \mathbb{R}\}$
Mostrar que $\mathbb{R}^4 = S \oplus T$.
(b) $S = \{p(x) \mid p(x) = bx, b \in \mathbb{R}\}; T = \{q(x) \mid q(x) = a, a \in \mathbb{R}\}$
Mostrar que $P_1(x) = S \oplus T$.
(c) Si $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}; T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \mid e, f \in \mathbb{R} \right\}$
Mostrar que $M_{2\times 2}(R) \neq S \oplus T$.
(d) Si $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}; T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \mid e, f \in \mathbb{R} \right\}$
Mostrar que $M_{2\times 2}(R) \neq S \oplus T$.
(e) Si $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}; T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \mid e, f \in \mathbb{R} \right\}$
Mostrar que $M_{2\times 2}(R) \neq S \oplus T$.

XI)

1. Para que valores de la constante K, el conjunto:
$\{(k, 1, 0), (1, 0, k), (k + 1, 1, k)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$

2. Hallar la Dimension y una base para el espacio solucion W del sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 0 \\ x - y - z - u &= 0 \\ 5x - y - z - u &= 0 \end{aligned}$$

3. Probar que S es subespacio de $M_{2x3(\mathbb{R})}$.Hallar $\dim[S]$ y una base para S:

   (a) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & w \\ w & 0 & 0 \end{pmatrix} / x + w = 0 \right\}$

   (b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & 0 \end{pmatrix} / x = y + z \right\}$

Capítulo 8

TRANSFORMACIONES LINEALES

Una función $T : R^n \longrightarrow R^m$ se llama una transformación lineal si T$(x_1, x_2, ..., x_n) =$
$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, ..., a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n)$
o bien

$$T(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

o $T(x) = A_{m\times n}X_{n\times 1} = A \cdot X$; A es llamada matriz asociada de la transformacion T y A, la matriz respecto a las bases canonicas y

$$A = \begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) & .... & T(e_n) \\ \text{col}\,1 & \text{col}\,2 & .... & \text{col}\,n \end{pmatrix}$$

Definición 4 *Una función* $T : R^2 \longrightarrow R^2$

es una transformación lineal si es de la forma

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = AX$$

Ejemplo 8.1 $T(x, y) = (2x - 3y, 5x + 7y)$ *es una transformación lineal.*

Ejemplo 8.2 *No es lineal la transformación* $T(x, y) = (x + 2y, 2x + 1)$

Una función $T : R^2 \longrightarrow R^3$
es una transformación lineal si $T(x, y) = (ax + by, cx + dy, ex + fy)$

Ejemplo 8.3 $T(x,y) = (2x-3y, 5x+7y, y)$ *es una transformación lineal.*

Ejemplo 8.4 *No es lineal la transformación* $T(x,y) = (y, 2, \ln x)$

Ejemplo 8.5 *Una función* $T : R^3 \longrightarrow R^4$

es una transformación lineal si es de la forma
$$T(x,y,z) = (ax+by+mz, cx+dy+nz, ex+fy+pz, ox+ry+sz)$$

Ejemplo 8.6 $T(x,y,z) = (4x+3y+4z, -x+3y+3z, x+y+z, z)$ *es una transformación lineal.*

Ejemplo 8.7 *No es lineal la transformación* $T(x,y,z) = (\sqrt{x}, -x+3y+3z, x+y+z, z)$

Ejemplo 8.8 $T : R^2 \longrightarrow R^2$ *definida por* $T(x,y) = (x+2y, 2x+y)$ *es una transformación lineal.*

Ejemplo 8.9 *No es lineal la transformación* $T(x,y) = (x^2+2y^2, 2x+y)$

Ejemplo 8.10 *Sea* $T : R^2 \longrightarrow R^2$ *la transformacion lineal definida por* $T(x,y) = (x+2y, 2x+y)$

la matriz respecto a las bases canonicas (matriz asociada de T) se calcula asi

$$T(e_1) = T(1,0) = (1,2), T(e_2) = T(0,1) = (2,1)$$

$$\text{entonces } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ por tanto}$$

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x+2y, 2x+y)$$

Ejemplo 8.11 $T : R^2 \longrightarrow R^3$ *definida por* $T(x,y) = (x+2y, 2x+y, 2x)$

$$T(e_1) = T(1,0) = (1,2,2), T(e_2) = T(0,1) = (2,1,0)$$

entonces

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

por tanto

$$T(x,y)=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=(x+2y,2x+y,2x)$$

Ejemplo 8.12 $T:R^3\longrightarrow R^3$ *definida por* $T(x,y,z)=(x,y,z)\quad T(e_1)=T(1,0,0)=(1,0,0),T(e_2)=T(0,1,0)=(0,1,0)\ T(e_3)=T(0,0,1)=(0,0,1)$ *entonces*

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

por tanto

$$T(x,y,z)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=(x,y,z)$$

Ejemplo 8.13 $T:R^n\longrightarrow R^m$, *definida por* $(x_1,x_2,...,x_n)=(0,...,0)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=0.X=0$, *se llama transformación lineal nula* $T(x)=0$.

Ejemplo 8.14 $T:R^n\longrightarrow R^m$, *definida como* $T(x)T=x$, *llamada transformación idéntica* $T(x,y)=(x,y)$, $T(x,y,z)=(x,y,z)$.

Ejemplo 8.15 $T(x,y)=(-x,y)$ *Reflexión respecto al eje* y.

$$T(e_1)=T(1,0)=(-1,0),T(e_2)=T(0,1)=(0,1)\text{ entonces}$$

$$T(x,y)=(-x,y)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

es una transformación lineal

Ejemplo 8.16 $T(x,y)=(x,-y)$ *Reflexión respecto al eje* x.

$$T(e_1)=T(1,0)=(1,0),T(e_2)=T(0,1)=(0,-1)\quad A=[T(e_1),T(e_2)]$$

$$T(x,y)=(x,-y)=[T(e_1),T(e_2)]\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

es una transformación lineal

Ejemplo 8.17 $T(x,y)=(y,x)$ *Reflexión respecto a la recta* $y=x$.

$$A=[T(e_1),T(e_2)]=[(0,1),(1,0)]$$

$$T(x,y)=(y,x)=[T(e_1),T(e_2)]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

es una transformación lineal

Ejemplo 8.18 $T(x,y,z)=(x,y,-z)$ *Reflexión respecto al plano* xy.

$$(T(e_1),T(e_2),T(e_3))=((1,0,0),(0,1,0),(0,0,-1)) \text{ por tanto}$$

$$T(x,y,z)=(x,y,-z)=(T(e_1),T(e_2),T(e_3))\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal

Ejemplo 8.19 $T(x,y,z)=(x,-y,z)$ *Reflexión respecto al plano* xz *es una transformación lineal*

$$T(x,y,z)=(x,-y,z)=(T(e_1),T(e_2),T(e_3))\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal

Ejemplo 8.20

$$T(x,y,z)=(-x,y,z)$$
$$(T(e_1),T(e_2),T(e_3))=((-1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \text{ po tanto}$$

$$T(x,y,z)=(-x,y,z)=(T(e_1),T(e_2),T(e_3))\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal

Ejemplo 8.21

$$T(x,y) = (x,0) \text{ proyección ortogonal sobre el eje } x\text{,es una transformación lineal}$$

Ejemplo 8.22 $T(x,y) = (0,y)$ *proyección ortogonal sobre el eje* y*, es una transformación lineal*

$$[T(e_1), T(e_2)] = ((0,0),(0,1)) \text{ por tanto}$$

$$T(x,y) = [T(e_1), T(e_2)] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8.23

$$T(x,y,z) = (x,y,0) = (T(e_1), T(e_2), T(e_3)) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

proyección ortogonal sobre el plano xy *es una transformación lineal*

Ejemplo 8.24 $T(x,y,z) = (x,0,z)$ *proyección ortogonal sobre el plano* xz *es una transformación lineal*

Ejemplo 8.25 $T(x,y,z) = (0,y,z)$ *proyección ortogonal sobre el plano* yz*.*

$$T(x,y,z) = (T(e_1), T(e_2), T(e_3)) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

es una transformación lineal

Ejemplo 8.26

Rotaciòn de un àngulo θ respecto al eje z.

$$T(x,y,z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

es una transformación lineal

Ejemplo 8.27

$$\left.\begin{array}{l} T\left(x,y,z\right)=\left(x,0,0\right) \\ T\left(x,y,z\right)=\left(0,y,0\right) \\ T\left(x,y,z\right)=\left(0,0,z\right) \end{array}\right\}$$

son transformaciones lineales

$$T(x,y,z)=(2x+y+z,x-y+3z,x+2z)=$$

$$\left(T\left(e_1\right),T\left(e_2\right),T\left(e_3\right)\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

es una transformación lineal

Ejemplo 8.28 *No son transformaciones lineales*

1. $T(x,y,z)=(2xy+z,x-y+3z,x+2z)$
2. $T(x,y,z)=(1,x-y+3z,x+2z)$
3. $T(x,y)=(x^2,y+1)$
4. $T(x,y,z)=(\cos x,y+x)$
5. $T(x,y)=4$
6. $T(x,y,z)=xyz$
7. $T(x,y,z)=(x,e^x,z,y+1)$

Se extiende la definición de transformaciones lineales a casos más generales.

Definición 5 *Se dice que* $T:V\longrightarrow W$ *es una transformacióm lineal sisi* $T\left(u+v\right)=T\left(u\right)+T\left(v\right)$ *y*

$$T\left(\alpha u\right)=\alpha T\left(u\right),\ u,v\in V\ \ y\ \alpha \text{ un número real}$$
$$T\left(A\right)=\left|A\right| \text{ es una transformación no lineal pues}$$
$$T\left(A+B\right)=\left|A+B\right|\neq\left|A\right|+\left|B\right|=T\left(A\right)+T\left(B\right)$$
$$T\left(A\right)=A^{T} \text{ es una transformación lineal pues}$$
$$T\left(A+B\right)=\left(A+B\right)^{T}=A^{T}+B^{T}=T\left(A\right)+T\left(B\right) \text{ y } T\left(\alpha A\right)=\left(\alpha A\right)^{T}=\alpha A^{T}=\alpha T(A)$$

Ejemplo 8.29 *$T\left(f\right)=f'$ es una transformación lineal pues $T\left(f+g\right)=\left(f+g\right)'=f'+g'=T\left(f\right)+T\left(g\right)$ y $T\left(\alpha f\right)=\left(\alpha f\right)'=\alpha f'=\alpha T\left(f\right)$*

Ejemplo 8.30 *$T\left(A\right)=traA$ es una transformación lineal, pues*

$$Tr(A+B)=(a_{11}+b_{11})+(a_{22}+b_{22})+....+(a_{nn}+b_{nn})=$$

$$=(a_{11}+a_{22}+....+a_{nn})+(b_{11}+b_{22}+....+b_{nn})=TrA+TrB$$
$$Tr(\alpha A)=(\alpha a_{11}+\alpha a_{22}+....+\alpha a_{nn})=\alpha(a_{11}+a_{22}+....+a_{nn})=\alpha Tr(A)$$

Ejemplo 8.31
$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a+b$$
es una transformación lineal, pues

$$T(A+B)=T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix} a+m & b+n \\ c+p & d+q \end{pmatrix}=a+m+b+n=$$

$$(a+b)+(m+n)=T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+T\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}=T(A)+T(B)$$

y
$$T(\alpha A)=T\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}=\alpha a+\alpha b=\alpha(a+b)=\alpha T(A)$$

Definición 6 *Se define el núcleo de una tranformación lineal $T:V\longrightarrow W$ por núcleo de $T=\{(x\in V)/T(x)=0\}$ y la Imagen de una tranformación lineal por $\{(y\in W)/existe\ x\in V\ \ con\ T(x)$ y T es uno a uno si el nucleo de T es cero y es sobre si la dimImagen de T es igual a dim$W$ y un teorema inportante es el teorema de la dimensión que dice que si $T:V\longrightarrow W$ es una transformación lineal entonces*

$$\dim V=\dim(Núcleo\ de\ T)+Dim(\operatorname{Im}T)$$

Ejemplo 8.32

Sea $T : R^2 \longrightarrow R^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, x - y)$
Verificar que T es una transfomación lineal, hallar M$_T$, M$_{T^{-1}}$,El núcleo, ImT,DimNúcleode T,dmIm,T^{-1}
En efecto:

$$T(u + v) = T((a, b) + (m, n)) = T(a + m, b + n) = (a + m + b + n, a + m - (b + n)) =$$

$$(a + b, a - b) + (m + n, m - n) = T(a, b) + T(m, n) = T(u) + T(v)$$

$$T(\alpha u) = T(\alpha(a, b)) = T(\alpha a, \alpha b) = (\alpha a + \alpha b, \alpha a - \alpha b) = \alpha(a + b, a - b) = \alpha T(a, b)$$

La matriz respeccto a las bases canonicas se calcula por

$$T(1, 0) = (1, 1) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

entonces $a = 1, b = 1$

$$T(0, 1) = (1, -1) = m(1, 0) + n(0, 1)$$

entonces $m = 1, n = -1$ y asi la matriz de T respecto a las bases canónicas es

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{T^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

que es la inversa de la matriz

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El núcleo de T es donde $(x+y,x-y)=(0,0)$, es decir, donde $x+y=0$ y $x-y=0$ que es $(0,0)$, por tanto dimNúcleo de T es 0, por tanto T es uno a uno y dimImT es 2, luego T es sobre. La imagen son todos los valores (a,b) tales que $T(x,y)=(x+y,x-y)=(a,b)$,y solucionado este sistema se tiene que

$$x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2},y=\frac{a}{2}-\frac{b}{2},$$

Observe que

$$T(x,y)=T(\frac{a}{2}+\frac{b}{2},\frac{a}{2}-\frac{b}{2})=(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{a}{2}-\frac{b}{2},\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}))=(a,b)$$

$$T^{-1}\left(x,y\right)=\left(\begin{array}{cc}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right)=\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2},\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)$$

y

$$T(T^{-1}(x,y))=T\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2},\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)=\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{x}{2}-\frac{y}{2},\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)=(x,y)$$

Ejemplo 8.33

Sea $T:R^3\longrightarrow P_2(x)$ definida por $T(a,b,c)=(a+b)\,x^2+(a-c)\,x+a-b+c$ Verificar que T es una transfomación lineal, hallar M_T, $M_{T^{-1}}$,El núcleo, ImT,DimNúcleode T,dmIm,T^{-1}

T es una transformación lineal pues

$$T(u+v)=T\left((a,b,c)+(m,n,p)\right)=T\left(a+m,b+n,c+p\right)=$$

$$(a+m+b+n)x^2+\left((a+m)-(c+p)\right)x+a+m-(b+n)+c+p=$$

$$(a+b)x^2+(a-c)x+a-b+c+(m+n)x^2+(m-p)x+m-n+p=$$

$$T(a,b,c)+T(m,n,p)$$

y

$$T(\alpha u)=T(\alpha a,\alpha b,\alpha c)=\left(\alpha a+\alpha b\right)x^2+\left(\alpha a-\alpha c\right)x+\alpha a-\alpha b+\alpha c=$$
$$=\alpha\left((a+b)\,x^2+(a-c)\,x+a-b+c\right)=\alpha T(u)$$

La matriz de la transformación con respecto a las bases canónicas se calcula por

$$T(1,0,0) = x^2 + x + 1 = ax^2 + bx + c \text{ entonces } a = 1, b = 1, c = 1$$

$$T(0,1,0) = x^2 - 1 = mx^2 + nx + p \text{ entonces } m = 1, n = 0, p = -1$$

$$T(0,0,1) = -x + 1 = dx^2 + fx + h \text{ entonces } d = 0, f = -1, h = 1$$

por tanto

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}(ax^2 + bx + c\ ) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3}, \frac{2a}{3} - \frac{b}{3} - \frac{c}{3}, \frac{a}{3} - \frac{2b}{3} + \frac{c}{3} \right)$$

$$T\left(T^{-1}(ax^2 + bx + c\ )\right) = T\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3}, \frac{2a}{3} - \frac{b}{3} - \frac{c}{3}, \frac{a}{3} - \frac{2b}{3} + \frac{c}{3} \right) =$$

$$= ax^2 + bx + c$$

T es uno a uno, pues el Núcleo de T =0 ya que

$$(a+b)\,x^2 + (a-c)\,x + a - b + c = 0x^2 + 0x + 0 \ \text{ entonces}$$

$$a + b = 0,\ a - c = 0,\ a - b + c = 0 \text{ y solucionando este sistema}$$

se tiene que $a = 0, b = 0,\ c = 0$ por tanto núcleo de T es $\{(0,0,0)\}$ y dimNúcleo = 0 por tanto la dimImagen de T es 3 pues

$$\dim R^3 = 3 = \dim N\acute{u}cleo + Dim \operatorname{Im} T = 0 + Dim \operatorname{Im} T$$

Veamos de otra forma que la dimImagen es 3

Si $T(a,b,c) = (a+b)\,x^2 + (a-c)\,x + a - b + c = mx^2 + nx + p$ entonces

$$a + b = m, \quad a - c = n,\ a - b + c = p \text{ y asi}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & m \\ 1 & 0 & -1 & n \\ 1 & -1 & 1 & p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & -1 & n-m \\ 0 & -2 & 1 & p-m \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 & m-n \\ 0 & 0 & 3 & m-2n+p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 & m-n \\ 0 & 0 & 1 & \frac{m}{3}-\frac{2n}{3}+\frac{p}{3} \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2m}{3}-\frac{n}{3}-\frac{p}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{m}{3}-\frac{2n}{3}+\frac{p}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{m}{3}+\frac{n}{3}+\frac{p}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2m}{3}-\frac{n}{3}-\frac{p}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{m}{3}-\frac{2n}{3}+\frac{p}{3} \end{pmatrix}$$

luego

$$a = \frac{m}{3}+\frac{n}{3}+\frac{p}{3}, b = \frac{2m}{3}-\frac{n}{3}-\frac{p}{3}, c = \frac{m}{3}-\frac{2n}{3}+\frac{p}{3}$$

por tanto $T(a,b,c) =$

$$T(\frac{m}{3}+\frac{n}{3}+\frac{p}{3}, \frac{2m}{3}-\frac{n}{3}-\frac{p}{3}, \frac{m}{3}-\frac{2n}{3}+\frac{p}{3}) = \left(\frac{m}{3}+\frac{n}{3}+\frac{p}{3}+\frac{2m}{3}-\frac{n}{3}-\frac{p}{3}\right)x^2+$$

$$+\left(\frac{m}{3}+\frac{n}{3}+\frac{p}{3}-\frac{m}{3}+\frac{2n}{3}-\frac{p}{3}\right)x+\left(\frac{m}{3}+\frac{n}{3}+\frac{p}{3}-\frac{2m}{3}+\frac{n}{3}+\frac{p}{3}+\frac{m}{3}-\frac{2n}{3}+\frac{p}{3}\right) =$$

$$= mx^2+nx+p$$

luego T es sobre y la dimensión de la imagen de T es 3

Ejemplo 8.34

Sea $T : R^3 \longrightarrow R^4$ definida por

$$T(x,y,z) = (x+z, y-z, x+y, x-y+2z)$$

Verificar que T es una transfomación lineal, hallar M$_T$, M$_{T^{-1}}$,el núcleo de T, ImT,DimNúcleo de T,dimImT

En efecto:

$$T(u+v) = T\left((a,b,c)+(m,n,p)\right) = T\left(a+m, b+n, c+p\right) =$$

$$(a+m+c+p, b+n-(c+p), a+m+b+n, a+m-b-n+2(c+p)) =$$

$$(a+c+m+p, b-c+n-p, a+b+m+n, a-b+2c+m-n+2p) =$$

$$(a+c, b-c, a+b, a-b+2c) + (m+p, n-p, m+n, m-n+2p) =$$

$$T(a,b,c) + T\,(m,n,p) = T(u) + T(v)$$

y

$$T(\alpha u) = T(\alpha(a,b,c)) = T(\alpha a, \alpha b, \alpha c) = (\alpha a + \alpha c, \alpha b - \alpha c, \alpha a + \alpha b, \alpha a - \alpha b + 2\alpha c) =$$

$$\alpha\,(a+c, b-c, a+b, a-b+2c) = \alpha T(u)$$

la matriz de T respecto a las canónicas se calcula asi

$$T(1,0,0) = (1,0,1,1) = a(1,0,0,0) + b(0,1,0,0) + c\,(0,0,1,0) + d(0,0,0,1),$$

entonces

$$a = 1, b = 0, c = 1, d = 1$$

$$T(0,1,0) = (0,1,1,-1) = m(1,0,0,0) + n(0,1,0,0) + p\,(0,0,1,0) + q(0,0,0,1),$$

entonces

$$m = 0, n = 1, p = 1, q = -1$$

$$T(0,0,1) = (1,-1,0,2) = r(1,0,0,0) + n(0,1,0,0) + s\,(0,0,1,0) + t(0,0,0,1)$$

entonces

$$r = 1, n = -1, s = 0, t = 2$$

y asi la matriz de T respecto a las canónicas es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

El núcleo de T es

$$\{(-x, x, x) / x \epsilon R\}$$

pues

$$(x + z, y - z, x + y, x - y + 2z) = (0, 0, 0, 0)$$

y el sistema de ecuaciones

$$x + z = 0, y - z = 0, x + y = 0, x - y + 2z = 0$$

se transforma en

$$x + z = 0, y - z = 0$$

cuya solución es

$$\{(-x, x, x) / x \epsilon R\}$$

y asi DimNúcleo de T es 1, pues

$$(-x, x, x) = x(-1, 1, 1) \ \ \{(-1, 1, 1)\}$$

es una base del nucleo de T y por tanto la dimImT es 2 pues si solucionamos el sistema

$$(a, b, c, d) = (x + z, y - z, x + y, x - y + 2z)$$

se encuentra que

$$\begin{aligned} x + z &= a \\ y - z &= b \\ x + y &= c \\ x - y + 2z &= d \end{aligned}$$

es consistente para $c = a + b, d = a - b$ y asi la imagen de T es

$$\{(a, b, a + b, a - b) / a\epsilon R, b\epsilon R\}$$

y

$$(a, b, a + b, a - b) = (a, 0, a, a) + (0, b, b, -b) = a(1, 0, 1, 1) + b(0, 1, 1, -1)$$

luego
$\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, -1)\}$ es una base de la imagen de T

Ejemplo 8.35 *Sea $T : P_2(x) \longrightarrow P_1(x)$ definida por*

$$T(ax^2 + bx + c) = (a + 2b)x + (b + c)$$

entonces T es transformacion lineal, pues

$$T(u + v) = T((ax^2 + bx + c) + (mx^2 + nx + p)) =$$

$$T((a + m)x^2 + (b + n)x + (c + p)) = (a + m + 2(b + n))x + b + n + c + p =$$

$$(a + 2b)x + b + c + (m + 2n)x + n + p = T(ax^2 + bx + c) + T(mx^2 + nx + p) =$$

$$= T(u) + T(v)$$

y

$$T(\alpha u) = T(\alpha(ax^2 + bx + c)) = T((\alpha ax^2 + \alpha bx + \alpha c)) = (\alpha a + 2\alpha b)x + \alpha b + \alpha c$$

$$\alpha[(a + 2b)x + b + c] = \alpha T(ax^2 + bx + c) = \alpha T(u)$$

La matriz de la transformación lineal con respecto a las bases canónicas se calcula por

$$T(1) = T(0x^2 + 0x + 1) = 1 = a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0x^2 + 0x + 1$$

$$T(x) = T(0x^2 + 1x + 0) = 2x + 1 = a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0x^2 + 2x + 1$$

$$T(x^2) = T(1x^2 + 0x + 0) = x = a_3x^2 + b_3x + c_3 = 0x^2 + x + 0$$

entonces

$$M_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Núcleo de

$$T = (a+2b)\,x + (b+c) = 0x + 0$$

entonces

$$a + 2b = 0 \quad y \quad b + c = 0$$

luego

$$a = -2b \quad y \quad c = -b$$

entonces

$$\{(-2b, b, -b)\} = \{b\,(-2, 1, -1)\,/b \in R\}$$

luego Núcleo de T es

$$T = \left\{b(-2x^2 + x - 1)/b \in R, b \neq 0\right\}$$

y dimNúcleo de $T = 1$, dim$P_2(x) = 3$ por tanto dim Imagen es 2, luego T no es sobre.

Ejemplo 8.36 *Sea* $T : R^3 \longrightarrow M_{2\times2}(R)$ *definida por*

$$T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

entonces T *es una transformacion Lineal, ya que*

$$T(u+v) = T\left((a,b,c) + (m,n,p)\right) = T\left(a+m, b+n, c+p\right) = \begin{pmatrix} a+m & b+n \\ b+n & a+m \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & n \\ n & m \end{pmatrix} = T(a,b,c) + T\left(m,n,p\right) = T(u) + T(v)$$

$$T(\alpha u) = T(\alpha a, \alpha b, \alpha c) = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha b & \alpha a \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \alpha T(a,b,c) = \alpha T(u)$$

La matriz de la transformación lineal con respecto a las bases canónicas se calcula por

$$T(1,0,0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$T(0,1,0)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$T(0,0,1)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

por tanto

$$M_T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Núcleo de T

$$T(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

entonces $a=0,b=0$ por tanto el núcleo de $T=\{(0,0,c)\,/c\in R\}$. por tanto dimNncleo de $T=1$, $DimR^3=3, Dim\operatorname{Im}T=2$ y una base de la imagen es

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

T no es uno a uno, ni sobre.

Ejemplo 8.37 *Sea* $T:R^2\longrightarrow P_1$ *definida por*

$$T(a,b)=(a+b)\,x+a-b$$

entonces T *es una transformacion Lineal, ya que*

$$T(u+v) = T\left((a,b)+(m,n)\right) = T\left(a+m, b+n\right) = \left(a+m+b+n\right)x + a + m - b - n =$$

$$\left(a+b\right)x + a - b + \left(m+n\right)x + m - n = T(a,b) + T\left(m,n\right)$$

$$T(\alpha u) = T\left(\alpha(a,b)\right) = T\left((\alpha a, \alpha b)\right) = \left(\alpha a + \alpha b\right)x + \alpha a - \alpha b = \alpha\left(\left(a+b\right)x + a - b\right) = \alpha T(u)$$

$$T(1,0) = x+1 = ax+b,\ T(0,1) = x-1 = cx+d$$

luego

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}\left(ax+b\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$$

El nucleo de T es $(0,0)$ ya que $\left(a+b\right)x + a - b = 0x + 0$ entonces $a+b=0, a-b=0$ luego $a=0, b=0$

$$DimR^2 = \dim NucleodeT + \dim \operatorname{Im} T$$

$$2 = 0 + \dim \operatorname{Im} T$$

por tanto T es sobre y T es 1 a1

Ejemplo 8.38 *Rotación de un ángulo θ respecto al eje x positivo:*

$$T\left(x,y,z\right) = \left(x, y\cos\theta - z\sin\theta, y\sin\theta + z\cos\theta\right) =$$

$$= \left(T\left(1,0,0\right), T\left(0,1,0\right), T\left(0,0,1\right)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8.39 *La siguiente transfomacion lineal representa la rotación de un punto en sentido contrario a las manecillas del reloj un ángulo θ respecto al eje y positivo.*

$$T\left(x,y,z\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \left(x\cos\theta + z\sin\theta, y, -x\sin\theta + z\cos\theta\right)$$

Ejemplo 8.40 *Sea*

$$T : M_{2\times 2}(R) \longrightarrow M_{2\times 2}(R) \quad \textit{definida por } T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

es una transformacion lineal:

$$T(x+y) = T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} a+m & b+n \\ c+p & d+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+m & b+n \\ b+n & a+m \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & n \\ n & m \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} = T(x) + T(y)$$

$$T(\alpha x) = T\left(\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha b & \alpha a \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \alpha T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha T(x)$$

La matriz de la transformación lineal con respecto a las bases canónicas se calcula por

$$T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por tanto

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Núcleo de T ,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $a = 0, b = 0$ por tanto el núcleo es $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ con c,d numeros reales, DimNúcleo de T es 2, $DimM_{2\times 2}(R) = 4$, por tanto $Dim\,\mathrm{Im}\,T = 2$ y una base de la imagen es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y una base del núcleo es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

T no es uno a uno, no es sobre

Ejemplo 8.41 *Sea*

$$T : M_{2\times 2}(R) \longrightarrow M_{2\times 2}(R) \quad \text{definida por } T(A) = A^T$$

es una transformacion lineal, pues

$$T(A + B) = (A + B)^T = A^T + B^T = T(A) + T(B)$$

y

$$T(\alpha A) = (\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha T(A)$$

$$T(A) = T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

El nulceo de T es $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pues

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si y solo si $a = b = c = d = 0$ por tanto la dimension del nucleo es cero, la dimImT es 4, T es uno a uno y T es sobre

La matriz de la transformación lineal con respecto a las bases canónicas se calcula por

$$T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_{T^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por tanto

$$T^{-1}(A) = T^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{pmatrix}$$

por tanto

$$T^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

y

$$T\left(T^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8.42 *Sea*

$$T : M_{2\times 2}(R) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{definida por} \quad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$$

es una transformación lineal pues:

$$T\left(x+y\right)=T\left(\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc} m & n \\ p & q \end{array}\right)\right)=T\left(\begin{array}{cc} a+m & b+n \\ c+p & d+q \end{array}\right)=$$

$$a+m+d+q=T\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)+T\left(\begin{array}{cc} m & n \\ p & q \end{array}\right)=T\left(x\right)+T\left(y\right)$$

y

$$T\left(\alpha x\right)=T\left(\alpha\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\right)=T\left(\begin{array}{cc} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{array}\right)=\alpha a+\alpha d=\alpha\left(a+d\right)=\alpha T\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)=\alpha T\left(x\right)$$

La matriz de la transformación lineal con respecto a las bases canónicas se calcula por

$$T\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]=1=1.1$$

$$T\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right]=0=0.1$$

$$T\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right]=0=0.1$$

$$T\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]=1=0.1$$

por tanto $M_T=\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)$. El nucleo de T es $\left\{\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & -a \end{array}\right)\backslash a,b,c\in R\right\}$ pues $T\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)=a+d=0$ siysi $a=-d$. Dimension del nucleo es 3 y por tanto dimImT es 1, T no es uno a uno, ni sobre

Ejemplo 8.43 *Sea*

$$T : P_2 \longrightarrow M_{2\times 2}(R) \quad \text{definida por } T\left(at^2+bt+c\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$$

es una Transformacion lineal, pues

$$T(x+y) = T\left(\left(at^2+bt+c\right)+\left(mt^2+nt+p\right)\right) = T\left((a+m)t^2+(b+n)t+(c+p)\right) =$$

$$\begin{pmatrix} a+m & b+n \\ c+p & a+m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & n \\ p & m \end{pmatrix} =$$

$$T\left(at^2+bt+c\right)+T\left(mt^2+nt+p\right) = T(x)+T(y)$$

y

$$T(\alpha x) = T\left(\alpha(at^2+bt+c)\right) = T(\alpha at^2+\alpha bt+\alpha c) =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha a \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = \alpha T\left(at^2+bt+c\right) = \alpha T(x)$$

el nucleo de T es $0t^2+0t+0$ ya que

$$T\left(at^2+bt+c\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si y solo si $a=b=c=0$ luego y dimNucleo de T es cero, dimImT$=3$, ya que dim$P_2=3$. T es uno a uno pero no es sobre. La matriz de T se calcula asi:

$$T\left(1t^2+0t+0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(0t^2+1t+0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \, \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(0t^2 + 0t + 1\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \, \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{por tanto} \quad M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8.44 *Sea*

$$T : P_1 \longrightarrow P_2 \quad \textit{definida por} \quad T\left(at+b\right) = t\left(at+b\right) = at^2 + bt$$

es lineal, ya que:

$$T\left(x+y\right) = T\left(\left(at+b\right)+\left(ct+d\right)\right) = T\left(\left(a+c\right)t+\left(b+d\right)\right) = t\left(\left(a+c\right)t+\left(b+d\right)\right)$$
$$= t\left(at+ct+b+d\right) = t\left(at+b\right) + t\left(ct+d\right) = T\left(x\right) + T\left(y\right)$$

y

$$T\left(\alpha x\right) = T\left(\alpha\left(at+b\right)\right) = t\left(\alpha at + \alpha b\right) = \alpha t\left(at+b\right) = \alpha T\left(x\right)$$

El nucleo de T es $0t+0$, pues $T\left(at+b\right) = t\left(at+b\right) = at^2 + bt = 0t^2 + 0t + 0$ entonces $a = 0, b = 0,$, DimNucleo de T es 0, dimImagT = 2, pues dim $P_1 = 2$, $2 =$ dim $P_1 =$ dimNucleo + dimImg, T es uno a uno pero no es sobre.
$T(t) = T(t+0) = t^2 = xt^2 + yt + c = 1t^2 + 0t + 0$
$T(1) = T(0t+1) = t = xt^2 + yt + c = 0t^2 + 1t + 0$ por tanto

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8.45 *Sea*

$$T : P_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \textit{definida por} \quad T\left(p(x)\right) = \left(p(-1), p(0), p(1)\right)$$

es una transformacion lineal, pues

$$T\left(x+y\right) = T\left(p(x)+q(x)\right) = \left((p+q)(-1), (p+q)(0), (p+q)(1)\right) =$$

$$= ((p(-1)+q(-1), (p(0)+q(0), (p(1)+q(1)) = (p(-1), p(0), p(1)) + (q(-1), q(0), q(1)) =$$
$$T\left(p(x)\right) + T\left(q(x)\right)$$

y

$$T\left(\alpha p(x)\right) = \left(\alpha p(-1), \alpha p(0), \alpha p(1)\right) = \alpha\left(p(-1), p(0), p(1)\right) = \alpha T\left(p(x)\right)$$

El nucleo de T $T\left(p(x)\right) = T(a+bx+cx^2) = (p(-1), p(0), p(1)) = (a-b+c, a, a+b+c) = (0,0,0)$ entonces $a-b+c=0$, $a=0$, $a+b+c$ y solucionando este sistema se tiene que $a=b=c=0$ por tanto el nucleo es $0+0x+0x^2$ asi dimension del nucleo es cero, luego T es 1 a 1. La matriz de T

$$T(1) = (p(-1), p(0), p(1)) = (1,1,1)\,, \quad T(x) = (p(-1), p(0), p(1)) \quad = (-1,0,1)$$

$$T(x^2) = (p(-1), p(0), p(1)) \quad = (1,0,1)$$

entonces

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$T\left(x^2+5x+6\right) = \left((p(-1), p(0), p(1))\right) = (1-5+6, 6, 1+5+6)$$

$$T^{-1}\left(a,b,c\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \left(b, \frac{-a+c}{2}, \frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right)$$

por tanto

$$T^{-1}\left(a,b,c\right) = b + \left(\frac{-a+c}{2}\right)x + \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right)x^2$$

$$T^{-1}\left(0,3,0\right) = 3 + 0x - 3x^2$$

$$T^{-1}\left(T(a+bx+cx^2)\right) = T^{-1}\left((a-b+c, a, a+b+c)\right) =$$

$$= a + \frac{\left(-a+b-c+a+b+c\right)x}{2} + \left(\frac{a-b+c}{2} - a + \frac{a+b+c}{2}\right)x^2 =$$

$$= a + bx + cx^2$$

y

$$T\left(T^{-1}(a,b,c)\right)=T\left(b+\left(\frac{-a+c}{2}\right)x+\left(\frac{a}{2}-b+\frac{c}{2}\right)x^2\right)=$$

$$=\left(b+\frac{a}{2}-\frac{c}{2}+\frac{a}{2}-b+\frac{c}{2},b,b-\frac{a}{2}+\frac{c}{2}+\frac{a}{2}-b+\frac{c}{2}\right)=(a,b,c)$$

Ejemplo 8.46 *Sea*

$$T:P_1\longrightarrow P_1 \quad \textit{definida por} \quad T\left(ax+b\right)=(a+b)x+(a-b)$$

es una transformacion lineal, pues (Ejercicio). El nucleo de T *es* $0x+0$, *pues* $(a+b)x+(a-b)=0x+0$ *sisi* $a+b=0$ *y* $a-b=0$ *sisi* $a=0$ *y* $b=0$

$T(x)=x+1=ax+b$ entonces $a=1,b=1,$ $T(1)=x-1=cx+d$ entonces $c=1,d=-1$

por tanto

$$M=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}, \quad M^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$T^{-1}\left(mx+n\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix} \text{ entonces } T^{-1}\left(mx+n\right)=\left(\frac{m+n}{2}\right)x+\left(\frac{m-n}{2}\right)$$

$$T\left(T^{-1}\left(mx+n\right)\right)=T\left(\left(\frac{m+n}{2}\right)x+\left(\frac{m-n}{2}\right)\right)=$$

$$=\left(\left(\frac{m+n}{2}\right)+\left(\frac{m-n}{2}\right)\right)x+\left(\frac{m+n}{2}\right)-\left(\frac{m-n}{2}\right)=mx+n$$

y

$$T^{-1}\left(T\left(ax+b\right)\right)=T^{-1}\left((a+b)x+(a-b)\right)=\left(\frac{a+b+a-b}{2}\right)x+\frac{a+b-(a-b)}{2}=ax+b$$

T es sobre pues dimImT es 2

Ejemplo 8.47 *Sea*

$$T:P_1\longrightarrow\mathbb{R}^2 \quad \textit{definida por} \quad T\left(at+b\right)=(a,b)$$

es una transformacion lineal, pues

$$T\left(x+y\right)=T\left((at+b)+(mt+n)\right)=T\left((a+m)\,t+(b+n)\right)=\left((a+m)\,,(b+n)\right)=$$

$$=(a,b)+(m,n)=T\left(at+b\right)+T\left(mt+n\right)$$

y

$$T\left(\alpha x\right)=T\left(\alpha\left(at+b\right)\right)=T\left(\alpha at+\alpha b\right)=\left(\alpha a,\alpha b\right)=\alpha\left(a,b\right)=\alpha T\left(at+b\right)$$

El nucleo de T es $0t+0$, pues $T\,(at+b)=(a,b)=(0,0)$ sisi $a=0 \quad y \quad b=0$, dimNucleo de T es 0 y dimImg es 2, ya que $2=\dim P_1=$ dimNucleo + dimImg $=0+2$. la matiz de T es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ya que

$$T\,(t)=T\,(t+0)=(1,0)=1\,(1,0)+0\,(0,1)$$

$$T\,(1)=T\,(0t+1)=(0,1)=0\,(1,0)+1\,(0,1)$$

La transformacion lineal es uno a uno y sobre

$$T^{-1}\,(a,b)=at+b,\;\; T\left(T^{-1}\,(a,b)\right)=T\,(at+b)=(a,b) \text{ y } T^{-1}\,(T\,(at+b))=T^{-1}\,(a,b)=at+b$$

Ejemplo 8.48 *$T:P_1\longrightarrow P_1$ definida por $T\,(a+bx)=p(x+1)=a+b(x+1)$ hallar la matriz de T respecto a la base $B=\{6+3x,10+2x\}$*

En efecto

$$T(6+3x)=6+3(x+1)=a(6+3x)+b(10+2x)$$

luego

$$T(6+3x)=9+3x=6a+10b+(3a+2b)x$$

entonces

$$6a+10b=9 \;\text{ y } 3a+2b=3 \text{ y solucionando este sistema se tiene que } a=\frac{2}{3} \text{ y } b=\frac{1}{2}$$

por tanto

$$T(6+3x)=6+3(x+1)=a(6+3x)+b(10+2x)=\frac{2}{3}(6+3x)+\frac{1}{2}(10+2x)$$

En forma analoga

$$T(10+2x)=10+2(x+1)=c(6+3x)+d(10+2x)=\frac{-2}{9}(6+3x)+\frac{4}{3}(10+2x)$$

por lo tanto

$$M=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

8.1 EJERCICIOS PROPUESTOS CAPITULO 8

Considere las transformaciones del 1 al 19 y en cada una de ellas verificar que son lineales, hallar el Núcleo, la matriz de T respecto a las bases canónicas, la dimensión del núcleo e Imagen, si son uno y sobres

1. $T : P_1(x) \longrightarrow M_{2\times 2}(R) \qquad T(a+bx) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$
2. $T : P_1(x) \longrightarrow P_2(x) \qquad T(p(x)) = xp(x)$
3. $T : M_{2\times 2}(R) \longrightarrow R \qquad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+b$
4. $T : P_3(x) \longrightarrow P_2(x) \qquad T(p(x)) = p'(x)$
5. $T : P_2(x) \longrightarrow M_{2\times 2}(R) \qquad T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$
6. $T : P_2(x) \longrightarrow M_{2\times 2}(R) \qquad T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a & b \\ a & a+b \end{pmatrix}$
7. $T : R :\longrightarrow P_2(x) \qquad T(a) = a+ax+ax^2$
8. $T : M_{2\times 2}(R) \longrightarrow M_{2\times 2}(R) \qquad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ d & 0 \end{pmatrix}$
9. $T : M_{2\times 2}(R) \longrightarrow M_{2\times 2}(R) \qquad T(A) = A^T$
10. $T : P_2(x) \longrightarrow R^3 \qquad T(a+bx+cx^2) = (a,b,a)$
11. $T : M_{2\times 2}(R) \longrightarrow R \qquad T(A) = TrA$
12. $T : M_{2\times 2}(R) \longrightarrow R^3 \qquad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a,b,b)$
13. $T : R^3 \longrightarrow M_{2\times 2}(R) \qquad T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$
14. $T : M_{2\times 2}(R) \longrightarrow P_1(x) \qquad T(\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}) = ax+c$
15. $T : M_{2\times 2}(R) \longrightarrow R \qquad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+d$

16. $T : R^3 \longrightarrow R^3 \qquad T(x, y, z) = (x, 0, 0)$

17. $T : R^3 \longrightarrow R^3 \qquad T(x, y, z) = (x + y, x - z, x - 2y + 3z)$

18. $T : P_1 \to R^2$ $T(ax + b) = (b, a)$ Resp $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ T es 1a1 y sobre dimNT=0

19. $T : P_1 \to R^2$ $T(a + bx) = (p(0), p(1)) = (a, a + b)$ Resp $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ T es 1a1 y sobre dimNt=0

20. Mostrar que las transformaciones $T(x, y) = (x^2, y), T(x, y) = |x - y|$, $T(a, b, c) = a + bx + cx^2 + 4$ $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & d \end{pmatrix}, T(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b+1 \end{pmatrix}, T(a + bx) = a + bx + 1, T(a + bx + cx^2) = (a, b, 4)$ no son lineales

21. Sea $T : P_2 \to P_2$ definida por $T\left(ax^2 + bx + c\right) = (a + c)\, x^2 + (b + c)\, x$ verificar si $p(x) = x^2 + x - 1$ pertenece al núcleo de T

22. Sea $T : P_2 \to P_2$ definida por $T\left(at^2 + bt + c\right) = (a + c)\, t^2 + (b + c)\, t$ hallar una base para el núcleo de T

23. Sea $T : P_1 \to P_2$ una transformación lineal tal que
$$T(t - 1) = t^2 + t, T(t + 1) = t^2 - t$$
Hallar $T(7t + 1)$

24. Sea $T : R^2 \to R$ una transformación lineal tal que
$$T(1, 1) = 3,\ T(0, 1) = -2$$
Hallar T(a,b)

25. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que
$$T(f(x)) = f\'(x)$$
Considere la base de V= $\{\sin x, \cos x\}$ hallar la matriz de T respecto a esta base

26. Sea $T : R^2 \to R^2$ una transformación lineal tal que
$$T(x, y) = (x + y, x - y)$$

Analizar si $(4, 2)$ pertenece a la imagen de T, y si $(1, -1)$ pertenece al nucleo de T

Capítulo 9

DIAGONALIZACION

9.1 Matrices semejantes.

Diremos que dos matrices A y B de orden n son semejantes cuando existe una matriz P de orden n invertible, es decir, $|P| \neq 0$,tal que $B = P^{-1}AP$

Ejemplo 9.1 *Sean*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

se verifica que A *y* B *son matrices semejantes ya que existe*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tal que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B$$

Si $A, B \in M_n$ son matrices semejantes $(B = P^{-1}AB)$, entonces se verifica:

1. $|A| = |B|$

2. $B^n = P^{-1}A^nP$, para todo n $\in \mathbb{N}$.

Demostracion

1. $|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}|\,|A|\,|P| = \frac{1}{|P|}\,|A|\,|P| = |A|$

   Nota: $P^{-1}P = I$, por tanto $1 = |I| = |P^{-1}P|$

   De aqui se deduce que $|P^{-1}| = \dfrac{1}{|P|}$

2. $B^2 = BB = (P^{-1}AP)\,(P^{-1}AP) = P^{-1}A\,(PP^{-1})\,AP = P^{-1}AIAP = P^{-1}A^2P$

   $B^3 = BBB = (P^{-1}A^2P)\,(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2\,(PP^{-1})\,AP = P^{-1}A^2IAP = P^{-1}A^3P$

   Asi sucesivamente llegariamos a:

   $B^n = B^{n-1}B = (P^{-1}A^{n-1}P)\,(P^{-1}AP) = P^{-1}A^{n-1}\,(PP^{-1})\,AP = P^{-1}A^{n-1}IAP = P^{-1}A^nP$

Definición

Una matriz A de orden n se dice que es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal D, es decir, si existe una matriz invertible P tal que.

$D = P^{-1}AP$

El problema de la diagonalización consiste en, dada una matriz cuadrada A, estudiar que condiciones debe verificar A para que exista una matriz diagonal D que sea semejante a ella.

9.1.1 Autovalores y autovectores de una matriz cuadrada

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Diremos que un número λ es un autovalor o valor propio de A si existe:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}, X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

tal que $AX = \lambda X$

Ejemplo 9.2 *Sea la matriz A*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

se verifica que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

por tanto podemos asegurar que 2 es autovalor de la matriz A y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *es un autovector asociado al autovalor 2.*

9.1.2 Calculo de autovalores: Polinomio caracteristico.

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces se verifica que:
λ es un autovalor de A sii $\det(A - \lambda I) = 0$
donde I representa la matriz unidad de orden n.

Demostración.

Supongamos que λ es un autovalor de A. Esto significa que existe,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}, X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

tal que.

$$A. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$(A - \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir $(A - \lambda I)\, X = 0$ como estamos suponiendo que este sistema homogeneo tiene solucion distinta de la trivial, se tiene $\det(A - \lambda I) = 0$

9.1.3 Polinomio caracteristico

A la expresion $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ se le llama polinomio caracteristico de la matriz A.

9.1.4 Ecuacion Caracteristica.

A la ecuacion $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ se le denomina ecuacion caracteristica de la matriz A.

Por tanto, podemos decir que los autovalores de una matriz A son las raices de su polinomio caracteristico o las soluciones de su ecuacion caracteristica.

Ejemplo 9.3 *Hallar los autovalores de la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para hallar sus autovalores tendremos que resolver su ecuacion caracteristica. en este caso:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda) + (1-\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda)] =$$

$$(1-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0$$

Por tanto, los autovalores de A serán: $\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2.$

Si A y B son matrices de orden n semejantes, entonces tienen el mismo polinomio caracteristico, es decir, $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$.

Demostracion

Como A y B son matrices semejantes, $B = P^{-1}AP$

$$P_B(\lambda) = |B - \lambda I| = \left|P^{-1}AP - \lambda I\right| = \left|P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP\right| =$$

$$\left|P^{-1}(A - \lambda I)P\right| = \left|P^{-1}\right| |A - \lambda I| |P| = |A - \lambda I| = P_A(\lambda)$$

Si las matrices semejantes tienen el mismo polinomio caracteristico, entonces tendran los mismos autovalores.

9.2 Calculo de autovectores.

Sea A una matriz cuadrada de orden n y sea λ un autovalor de A. Si

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}$$

es un autovector de A asociado al autovalor λ , entonces X es solución no trivial del sistema homogeneo.

$$A. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$(A - \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí se deduce que para calcular los autovectores asociados a λ lo que hay que hacer es resolver el sistema homogéneo asociado $(A - \lambda I)X = 0$, que por ser λ autovalor de A, siempre va tener soluciones distintas a la trivial. Cada una de estas soluciones es un autovector asociado a λ. El conjunto de todas las soluciones del sistema homogéneo $(A - \lambda I)X = 0$ lo representaremos por S(λ). Dicho conjunto contiene a la solución trivial del sistema y a todos los autovectores de A asociados al autovalor λ.

Ejemplo 9.4 *Hallar los autovectores de la matriz A*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para dicha matriz vimos que sus autovalores eran $\lambda_1 = 1$ *y* $\lambda_2 = 2$. *Tenemos que calcular los autovectores asociados a ambos autovalores.*

para $\lambda_1 = 1$ *entonces* $(A - I)\,X = 0$, *por tanto.*

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 0 \\ -1 & 3-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuyas soluciones son $x_1 = x_3, x_2 = 0$.*Por tanto, los autovectores seran de la forma*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ con } \; x_1 = \; \alpha \in \mathbb{R}.$$

para $\lambda_2 = 2$ *se tiene* $(A - 2I)\,X = 0$, *entonces.*

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 2 & 0 \\ -1 & 3-2 & 1 \\ 0 & 1 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuyas soluciones son $x_1 = 2x_2, x_3 = x_2$.Por tanto, los autovectores seran de la forma

$$\begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 9.5 *Hallar a y b tal que la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$ *admita a* $(-1, 1)$ *como vector propio para* $\lambda = 4$

En efecto como $(-1, 1)$ es un vector propio para $\lambda = 4$, entonces
$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ entonces

$$-1 + a = -4 \text{ y } -3 + b = 4$$

$$\text{por tanto } a = -3 \quad y \quad b = 7$$

9.3 Algunas propiedades de los valores y vectores propios

Si $A_{n\times n}$ entonces

1. La suma de los n valores propios de la matriz A es igual a su traza
2. El producto de los n valores propios de la matriz es igual a su determinante
3. Los valores propios de A coiciden con los de su transpuesta
4. Si λ_i son los valores propios de A entonces λ_i^n son los valores propios de A^n, ademas A y A^n tienen los mismos valores propios.
5. n vectores propios distintos corresponden a n valores propios diferentes son linealmente independientes
6. Una matriz triangular tiene como valores propios a los elementos de la diagonal
7. A valores propios diferentes corresponden vectores propios linealmente independientes
8. Si λ es un valor propio de A entonces $\alpha\lambda$es un valor propio de αA

9.4 Diagonalizacion de una matriz cuadrada.

Sea A una matriz cuadrada de orden n y supongamos que es diagonalizable. Esto significa que existe

una matriz $P \in M_n$, $|P| \neq 0$, tal que $P^{-1}AP = D$ siendo D una matriz diagonal de orden n. Es decir:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

o lo que es lo mismo.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Igualando las columnas de la matriz resultante del producto del primer mienbro con las del producto del segundo mienbro obtenemos que:
Primera columna:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \dots \\ p_{n1} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \dots \\ p_{n1} \end{pmatrix}$$

Segunda columna:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \dots \\ p_{n2} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \dots \\ p_{n2} \end{pmatrix}$$

n-esima columna:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \dots \\ p_{nn} \end{pmatrix} = \lambda_n \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \dots \\ p_{nn} \end{pmatrix}$$

A partir de aqui se deduce que $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ son autovalores de la matriz A y que cada una de las columnas de la matriz P

$$P_j = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}$$

es un autovector asociado al autovalor λ_j para todo $j = 1, ..., n$

Ejemplo 9.6 *Sea* $A \in M_{3\times 3}(R)$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces tenemos que:

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2 (1 - \lambda)$$

una matriz diagonal semejante podria ser D

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para determinar la matriz P *tal que* $D = P^{-1}AP$*, tendremos que resolver los sistemas asociados a cada*

uno de los autovalores.

Con $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 5-3 & 0 & -4 \\ 0 & 3-3 & 0 \\ 2 & 0 & -1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x - 2z = 0$ *cuyas soluciones son*

$$\begin{pmatrix} 2\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

De todas las posibles soluciones elegimos dos, de la siguiente forma:

$$\alpha = 1, \beta = 0 \Longrightarrow P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 0, \beta = 1 \Longrightarrow P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 5-1 & 0 & -4 \\ 0 & 3-1 & 0 \\ 2 & 0 & -1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x - z = 0,\ y = 0$ *cuyas soluciones son*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

De todas las posibles soluciones elegimos una, de la siguiente forma:

$$\alpha = 1 \Longrightarrow P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz P podria ser

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

Como un resumen se tiene que

1. $A_{n\times n}$ es diagonalizable, si existe P tal que:$A = PDP^{-1}, es$ decir, $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal. (A$_{n\times n}$ es diagonalizable si y solo si A tiene n vectores propios linealmente independientes asociados a los valores propios y en general si A es real y simetrica entonces A es diagonalizable)

2. Los valores propios de $A_{n\times n}$ son las raices de la ecuación $|A - \lambda I| = 0$

3. Los vectores propios de A correspondiente al valor propio λ,son las soluciones no nulas de $Ax = \lambda x$

Ejemplo 9.7

Hallar A^{100}, los valores propios y los vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son las raices de la ecuacion $|A - \lambda I| = 0$, es decir:

$$\left| \begin{matrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{matrix} - \lambda \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{matrix} \right| = 0$$

ssi $(1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = 0$ sisi $4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 + 2 = 0$,sisi $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ sisi $(2-\lambda)(\lambda - 3) = 0$,

Luego $\lambda = 2, \ \ \lambda = 3$ son valores propios.

El vector propio para $\lambda = 2$ es una solucion no nula del sistema $Ax = 2x$ sii $(A - 2I)x = 0$,

Luego,

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sii

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sii

$$\begin{matrix} -x + y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{matrix}$$

sisi $x = y$, luego la solución del sistema es:

$\{(x, y) \mid y = x\} = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, luego si $x = 1$, entonces $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, es un vector propio para $\lambda = 2$.

El vector propio para $\lambda = 3$ es una solucion no nula del sistema $Ax = 3x$, es decir $(A - 3I)x = 0$, es decir,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sisi $-2x + y = 0$, es decir $y = 2x$, es la solucion del sistema, luego la solucion del sistema es:

$$sol = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}\,; si \quad x = 1$$

entonces $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, es un vector propio para $\lambda = 3$ por tanto la matriz de P se puede escribir como

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Luego A es diagonalizable y asi:

$$A^{100} = \left(PDP^{-1}\right)^{100} = PD^{100}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

RESUMEN

Para hallar la matriz P se procede asi:

- Se hallan los valores propios de A $(|A - \lambda I| = 0)$, las raices de la ecuación $|A - \lambda I| = 0$
- Se hallan los vectores propios correspondientes a cada λ, que corresponde a las soluciones no nulas de $AX = \lambda X$ y se forma una base.
- Se forma la matriz P con los vectores propios como columna en un orden especifico y con este se contruye la matriz diagonal $(D = P^{-1}AP)$

Ejemplo 9.8

Sea

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & 3+i \end{pmatrix}$$

1. Los valores propios de A

$$|A - \lambda I| = \begin{pmatrix} i-\lambda & 2 \\ 0 & 3+i-\lambda \end{pmatrix} = (i-\lambda)(3+i-\lambda) = 0$$

sii $\lambda = i, \qquad \lambda = 3+i$, luego los valores propios son complejos

1. Los vectores propios

Si $\lambda = i$, entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sii $2y = 0$ y $3y = 0$ por tanto $y = 0$, luego

la solucion es $= \{(x,0)\,/x \in \mathbb{R}\}$ y un vector propio es $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ si $\qquad x = 1$

para $\lambda = 3+i$, entoces

$$\begin{pmatrix} i-(3+i) & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sii $-3x + 2y = 0$ entonces
solucion:

$$\left\{ \left(x, \frac{3}{2}x \right) /x \in \mathbb{R} \right\}$$

y un vector propio es $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, cuando $x = 2$, luego

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & 3+i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 3+i \end{pmatrix} = D$$

Luego

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^3 = \left(PDP^{-1}\right)^3 = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^3P^{-1}$$

Ejemplo 9.9 *Si*

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Los valores propios de A son

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} i-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & i-\lambda \end{vmatrix} = (i-\lambda)(i-\lambda)(-\lambda) = 0$$

$$\lambda = 0 \ y \ \lambda = i$$

Para $\lambda = 0$, un vector propio es

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pues

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sii

$$ix = 0$$
$$x = 0$$
$$iz = 0$$

luego la solucion es

$$\{(0, y, 0) \,/ y \in \mathbb{R}\}$$

y asi un vector propio es

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuando $y = 1$

Los vectores propios para $\lambda = i$ son

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pues

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sii $x - iy = 0$ sii $x = iy$ luego la solucion es $\{(iy, y, z) / y, z \in \mathbb{R}\}$; asi que

$$(iy, y, z) = (iy, y, 0) + (0, 0, z) \ = y (i, 1, 0) + z (0, 0, 1)$$

entonces

$$P = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \left(PDP^{-1}\right)^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

Ahora observemos lo siguiente si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4^2 \end{pmatrix}$$

luego

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 9.10 *Si*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de A son las raices de la ecuacion

$$|A - \lambda I| = 0 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda (2-\lambda)(3-\lambda) + 2(2-\lambda) = 0$$

sii

$$(2-\lambda)[-\lambda(3-\lambda)+2] = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1) = 0$$

sii

$$\lambda = 2 \qquad \lambda = 1$$

Para $\lambda = 2$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; sisi \; \begin{pmatrix} -2x-2z & = & 0 \\ x+z & = & 0 \\ x+z & = & 0 \end{pmatrix} \; sii \; x+z=0$$

$x = -z$ Luego la solucion es $\{(-z, y, z) / y, z \in \mathbb{R}\}$; luego una base del espacio solucion es

$$(-z, y, z) = (-z, 0, z) + (0, y, 0) = z(-1, 0, 1) + y(0, 1, 0)$$

Para $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$sii$$

$$\begin{pmatrix} x+y+z & = & 0 \\ -x-2z & = & 0 \\ x+2z & = & 0 \end{pmatrix}$$

y la solucion es $\{(-2z, z, z) / z \in \mathbb{R}\}$, luego una base es $(-2, 1, 1)$ con $z = 1$ así

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

Luego $A = PDP^{-1}$ y así

$$A^3 = \left(PDP^{-1}\right)^3 = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^3P^{-1}$$

Luego $A^n = PD^nP^{-1}$

Ejemplo 9.11 *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son

$$|A - \lambda I| = 0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0,$$

Sisi $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3$

Los vectores propios.
Para $\lambda = 1$ el vector propio es una solucion de

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad si \quad \begin{pmatrix} 2y + 3z & = & 0 \\ y + 4z & = & 0 \\ 2z & = & 0 \end{pmatrix}$$

Si $y = z = 0$, luego la solucion es$\{(x, 0, 0)\,/x \in R\}$ y asi si $x = 1$ entonces $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y un vector propio.

para $\lambda = 2$, es

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sii

$$\begin{pmatrix} -x + 2y + 3z & = & 0 \\ 4z & = & 0 \\ z & = & 0 \end{pmatrix}$$

sii $-x + 2y = 0$ sisi $x = 2y$, $y = \dfrac{x}{2}$, luego

$$\left\{\left(x, \frac{x}{2}, 0\right)/x \in \mathbb{R}\right\} \text{ es la solución}$$

así un vector propio es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

El vector propio correspondiente a $\lambda = 3$ es

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sii

$$\begin{aligned} -2x + 2y + 3z &= 0 \\ -y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

sii

$$z = t, \qquad y = 4t \qquad x = \frac{11}{2}t \text{ y asi la solución es}$$

$$\left\{\left(\frac{11}{2}t, 4t, t\right) / t \in \mathbb{R}\right\}$$

y un vector propio es

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ luego } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{11}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{11}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

Ejemplo 9.12 *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & p & q \\ -1 & q & 2 \\ 3 & p & -4 \end{pmatrix}$$

Hallar p y q sabiendo que el valor propio $\lambda = 1$ corresponde el vector propio $(3, -1, 3)$
En efecto, como el vector propio $(3, -1, 3)$ correspondiente a $\lambda = 1$ entonces

$$\begin{pmatrix} 5 & p & q \\ -1 & q & 2 \\ 3 & p & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

y solucionando el sistema se tiene que $p = -6$ y $q = 4$ y ahora determinamos los valores propios de $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

En efecto,

$$|A - \lambda I| = 0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (-\lambda - 2)^2 (\lambda - 1) = 0 \text{ sisi } \lambda = 1, \lambda = 2$$

Para $\lambda = 1$ el vector propio es $(3, -1, 3)$ pues es la solucion del sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{sisi } -x + 3y + 2z = 0,\ 3y + z = 0$$

Para $\lambda = 2$;

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + 2y + 2z = 0\ x = 2t + 2h \quad y = t \quad z = h$$

luego

$$(2t + 2h, t, h) = (2t, t, 0) + (2h, 0, h) = t\,(2, 1, 0) + h\,(2, 0, 1)$$

asi los vectores propios son $(2, 1, 0), (2, 0, 1)$
luego

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

Ejemplo 9.13 *Hallar x, y tal que la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{pmatrix}$$

para el valor propio $\lambda = 5$ tenga como vector propio $v = (-2, 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sisi $-2 + x = -10; \qquad x = -8, \qquad -4 + y = 5$ *luego* $y = 9$

Ejemplo 9.14 *Hallar los valores de a,b tal que la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 2 & a \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene como vector propio a $(2, 2, -2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 2 & a \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sisi

$$\begin{aligned} 2 + 4 - 2b &= 2\lambda \\ 4 - 2a &= 2\lambda \\ -4 - 2 &= -2\lambda \end{aligned}$$

luego $\lambda = 3, a = -1, b = 0$

Ejemplo 9.15 *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

el vector propio $(-3, 2)$ *a que valor propio corresponde*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -3\lambda - 6 &= 3\lambda \\ 3 &= -\lambda 3 \Rightarrow \lambda = -1 \\ -6 + 4 &= 2\lambda \end{aligned}$$

Ejercicio 1

1. Para que valores de a y c el vector $(8, 4)$ es un vector propio de:
   $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ asociado al valor propio 3.

2. Determinar las constantes a, b, c, d, e, f si:

   $(1,1,1)$ y $(1,0,-1)$ son vectores propios de:

   $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & c & d \\ 1 & e & f \end{pmatrix}$ y A simétrica

3. Determinar las constantes a, p, c, b, q, r si:

   $(1,1,0)$, $(-1,0,2)$, $(0,1,-1)$ son vectores propios de:

   $A = \begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$

4. Verifique que $\lambda = 4$ es un valor propio de $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y que $(1,-2)$ es un vector propio de $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ para $\lambda = -1$

5. Verifique que $(1,-2)$ es un vectoror propio de $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

6. Sea A una matriz con valores propios 2,1 y con vectores propios $(5,2)$ y $(7,3)$ hallar la matriz P y A^4

7. Sea A una matriz con valores propios 3,4,5 hallar los valores propios de A^T, el determinante de A, la traza de A

8. Sea

   $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ y tiene a $(-1,1)$ como vector propio, halle el valor propio

9. Hallar los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Hallar una matriz que tiene valores propios 1 y 2 y sus vectores propios $(1,1)$, $(1,0)$.

11. Los valores propios de una matriz simétrica son 1,-2 y 3 con vectores propios $(1,1,-1)$, $(0,1,1)$, halle la matriz A y el otro vector propio.

12. Calcular A^n si
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

13. La matriz
$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$$
tiene a $(1,1,0), (-1,0,2)$ y $(0,1,-1)$ como vectores propios, hallar los valores propios y los elementos de la matriz

14. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$$
hallar los valores de a y b para que $(-1,1)$ sea un vector propio para $\lambda = 4$ y el vector $(1,1)$ sea un vector propio para $\lambda = 5$

15. Hallar el valor de a y b tal que la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
admite para $\lambda = 1$, el vector propio $(1,0,-1)$

16. Hallar a, b,c talque la matriz
$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ b & 2 & 1 \\ -1 & 1 & c \end{pmatrix}$$
tenga por polinomio caracteristico a $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda + 3$

17. Hallar a, b, talque la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 2 & a \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
tenga por valores propios a $\lambda = 5, \lambda = -2, \lambda = 1$

BIBLIOGRAFIA

Anton Introducción al Algebra lineal
Grossman Algebra Lineal
Kolman Algebra lineal
Lang Introduccion al Algebra Lineal